Valentin
Melot
17 mars 2021

Corrigé du DS n° 8

Exercice n° 1 :

Partie A :

1. $A \in \mathcal{C}_f$, donc $y_A = f(x_A)$, c'est-à-dire

$$\frac{a}{1+e^{-b\times 0}} = 0{,}5$$

Donc $\frac{a}{2} = 0{,}5$, d'où $\underline{a = 1}$

2. Soit $u : x \mapsto 1 + e^{-bx}$. exp est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ $x \mapsto -bx$ est linéaire donc dérivable de dérivée $x \mapsto -b$. Par composition puis par somme, u est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $u'(x) = -be^{-bx}$.

Or $f = \frac{1}{u}$, donc $f' = -\frac{u'}{u^2}$, donc pour tout

$$x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{b e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}.$$

3. On sait que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A a pour coefficient directeur $f'(0)$, soit $\frac{b \times e^0}{(1+e^0)^2}$, c'est-à-dire $\frac{b}{4}$.

Par ailleurs, cette tangente a pour coefficient directeur : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0,5}{10} = 0,05$.

Donc $\dfrac{b}{4} = 0,05$, d'où $\underline{b = 0,2}$.

Partie B :

1. La proportion recherchée est :

$$p(10) = \frac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88.$$

2.a. * Version 1 :

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $y \geq x$.

$-0,2y \leq -0,2x$

donc $\exp(-0,2y) \leq \exp(-0,2x)$ (par croissance de exp).

donc $1 + e^{-0,2y} \leq 1 + e^{-0,2x}$

donc $p(y) \geq p(x)$

Donc $\underline{p \text{ est croissante}}$ sur $[0, +\infty[$.

* Version 2 : p est la fonction f étudiée à la partie A. Sa dérivée est :

$$p' : x \mapsto \frac{0,2\, e^{0,2x}}{(1+e^{0,2x})^2}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{0,2x} \geq 0$ et $(1+e^{0,2x})^2 \geq 0$.

Donc $p'(x) \geq 0$, donc $\underline{p \text{ est croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2.b. $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,2x = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$.

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,2x} = 0$. Donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + e^{-0,2x}\right) = 1$, d'où $\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = 1.}$

2.c. Cela signifie qu'à long terme, presque tous les individus sont équipés

3. $p(x) \geq 0,95 \iff 1 + e^{-0,2x} \leq \frac{20}{19}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\iff e^{-0,2x} \leq \frac{1}{20}$

$\iff e^{0,2x} \geq 20$

→ Version 1 :

$p(x) \geq 0,95 \iff 0,2x \geq \ln(20)$

$\iff x \geq 5 \ln(20)$

À la calculatrice, $5 \ln(20) \approx 14,98$.

Donc la proportion d'individus équipés dépasse 95% $\underline{\text{à la fin de l'année 2014.}}$

→ Version 2 :

$p(x) \geq 0,95 \iff e^{x} \geq 20^{5}$

$\iff e^{x} \geq 3\ 200\ 000.$

À la calculatrice, on remarque que

$e^{15} \approx 3,269 \cdot 10^{6}$

$e^{14,9} \approx 2,958 \cdot 10^{6}$

Donc la proportion d'individus équipés dépasse

95% à la fin de l'année 2014.

4. a. Soit $u : x \mapsto 1 + e^{-0,2x}$. On a montré que $p = \frac{1}{u}$, donc $p' = -\frac{u'}{u^2}$. En conséquence, sachant que $(u^2)' = 2u'u$, on a :

$$p'' = (p')' = \left(-\frac{u'}{u^2}\right)'$$
$$= -\left(\frac{u'}{u^2}\right)'$$
$$= -\frac{u''u^2 - u'(u^2)'}{u^4}$$
$$= \frac{2u'^2u - u''u^2}{u^4}$$
$$p'' = \frac{2u'^2 - u''u}{u^3}.$$

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$u'(x) = -0,2\, e^{-0,2x}$$
$$u''(x) = 0,04\, e^{-0,2x}.$$

Donc $$p''(x) = \frac{2 \times (-0,2\, e^{-0,2x})^2 - 0,04\, e^{-0,2x}(1 + e^{-0,2x})}{(1 + e^{-0,2x})^3}$$
$$= \frac{0,04\, e^{-0,4x} - 0,04\, e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^3}.$$

$$p''(x) = \frac{0,04}{(1 + e^{-0,2x})^3}\left[e^{-0,4x} - e^{-0,2x}\right].$$

4. b. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-0,4x \leq -0,2x$, donc

$\exp(-0,4x) \leq \exp(-0,2x)$ par croissance de exp

donc $e^{-0,4x} - e^{-0,2x} \leq 0$.

En outre, $1 + e^{-0,2x} \geq 0$, donc $p''(x) \leq 0$.

Il suit que p est une fonction concave. Sa croissance ne fait que ralentir. Alice a donc raison.

Exercice n°2 :

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ est non nul. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ étaient colinéaires, alors il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.
On aurait alors $\begin{cases} 2 = 2\lambda \\ 1 = -2\lambda \end{cases}$ ce qui est impossible.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés, d'où A, B et C définissent un plan.

2. D'une part, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{ABC})$.

D'autre part, les coordonnées étant données dans un repère orthonormé, on a :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -(4-2) = -2.$$

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{5}.$$

Donc $-2 = 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos(\widehat{ABC})$

d'où

$$\cos(\widehat{ABC}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Donc $\underline{\widehat{ABC} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 108°.}$

3. Soient (x, y, z) les coordonnées du point recherché.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 3 = 0 \\ 3y - 3 = 0 \\ 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Il existe donc bien un unique point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

et ses coordonnées sont : $G(1, 1, -1)$.

4. a. D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

donc $3\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

donc $\underline{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$.

b. On en déduit que $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc que les points A, B, C et G sont coplanaires.

En conséquence, $\underline{G \in (ABC)}$.

5. a. $\overrightarrow{GS}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$. Les coordonnées étant données dans une base orthonormée,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GS} = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GS} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Or, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs de (ABC).

Donc $\overrightarrow{GS}$ est normal à (ABC).

5. b. Le sujet comportait une coquille. En effet, au

vu de la question 4. a., A, G et B ne sont pas alignés donc G ne peut pas être un projeté sur (AB).
G est en revanche <u>le projeté orthogonal de S sur (ABC).</u>

6. a. $M \in \mathcal{E}$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{MG}^2 + 2\vec{MG}\cdot\vec{GA} + 2\vec{MG}\cdot\vec{GB} + 2\vec{MG}\cdot\vec{GC} + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + 2\vec{MG}\cdot\underbrace{(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})}_{0} + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 = 13$$

En outre, les coordonnées étant connues dans une base orthonormée,

$$GA^2 = 2^2 + 0^2 + 1^2 = 5$$

$$GB^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$$

$$GC^2 = 2^2 + 0^2 + 0^2 = 4.$$

Donc

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 3MG^2 + 5 + 1 + 4 = 13$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = 3$$

$$\underline{M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MG = 1}$$

6. b. Donc $\mathcal{E}$ est la sphère de centre G et de rayon 1.

<u>Exercice n° 3:</u>

1. a. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, donc

$$\underline{\exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{e^x + e^y}{2}}$$

1.b. On a :

$$\left.\begin{array}{l} e^{X} = x \\ e^{Y} = y \end{array}\right\} \text{ donc } \frac{e^{X}+e^{Y}}{2} = \frac{x+y}{2}$$

$$e^{\frac{X+Y}{2}} = \sqrt{e^{X+Y}} = \sqrt{e^{X}e^{Y}} = \sqrt{xy}.$$

Donc $\underline{\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est de plus majorée par y_0. Donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie $\alpha \in \mathbb{R}$.
De même, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle admet une limite finie $\beta \in \mathbb{R}$.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= y_{n+1} - x_{n+1} \\ &\leq y_{n+1} - x_n \\ &= \frac{x_n + y_n}{2} - x_n \\ &= \frac{y_n - x_n}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{c_{n+1} \leq \frac{c_n}{2}.}$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition :

$$H_n : « c_n \leq \frac{y_0 - x_0}{2^n} ».$$

$$c_0 = y_0 - x_0 = \frac{y_0 - x_0}{2^0},$$ donc H_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie. Alors

$$c_{n+1} \leq \frac{}{2}$$ d'après la question précédente,

$$C_{n+1} \leq \frac{\frac{y_0 - x_0}{2^n}}{2} \quad \text{d'après } H_n.$$

Donc $C_{n+1} \leq \frac{y_0 - x_0}{2^{n+1}}$.

Donc H_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.
Donc : $\underline{C_n \leq \frac{y_0 - x_0}{2^n}}$.

3. c. La suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, donc $\left(\frac{y_0 - x_0}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'après le théorème de limite par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 0$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \beta$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$. Donc

par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 0$. Donc par unicité de la limite,

$$0 = \alpha - \beta$$

soit $\underline{\alpha = \beta}$.

4. On saisit dans A2 : « $\underline{= \text{RACINE}(A1 * B1)}$ »
et dans A1 : « $\underline{= (A1 + B1)/2}$ ».

5. On constate que la convergence est très rapide. En effet, la majoration de la question 3.b. assure une division par 2 de l'erreur à chaque étape (soit une décimale correcte de gagnée toutes les trois à quatre itérations), mais en pratique une précision de 10^{-6} est atteinte après quatre itérations sur chaque exemple.

6. Soit I_n : « l'affirmation est vraie au rang n », pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n=0$: $x_0 = x_n$ et $y_0 = y_n$.

On vérifie que $x_0 y_0 \geq x_0^2$, donc $\sqrt{x_0 y_0} \geq x_0$, d'où $x_1 \geq x_0$.

De même, $x_0 + y_0 \leq 2y_0$, donc $\frac{x_0+y_0}{2} \leq y_0$, d'où $y_1 \leq y_0$.

Enfin, d'après la question précédente, $\sqrt{x_0 y_0} \leq \frac{x_0+y_0}{2}$, donc $x_1 \leq y_1$.

On a bien démontré que :

$$x_0 \leq x_0 \leq x_1 \leq y_1 \leq y_0 \leq y_0.$$

Donc H_0 est vraie.

Supposons I_n vraie. On a en particulier :

$$x_{n+1} \leq y_{n+1}$$

Donc :

* $\sqrt{x_{n+1} y_{n+1}} \geq \sqrt{x_{n+1}^2}$, soit $x_{n+2} \geq x_{n+1}$.
* $\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{2} \leq \frac{2y_n}{2}$, soit $y_{n+2} \leq y_{n+1}$.
* $\sqrt{x_{n+1} y_{n+1}} \leq \frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{2}$, soit $x_{n+2} \leq y_{n+2}$.

On a donc bien : $x_0 \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq y_0$.

Donc I_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est vraie, ce qui prouve l'affirmation 1.