Valentin Melot
4 mars 2021

# Corrigé du DS 7
## Calcul de dérivées

1. $f : x \mapsto e^x + 3x^2 + x$ sur $I = \mathbb{R}$

On sait que : $x \mapsto e^x$ est dérivable de dérivée $x \mapsto e^x$.

$x \mapsto x^2$ " $x \mapsto 2x$

$x \mapsto x$ " $x \mapsto 1$

Donc, par combinaison linéaire, $f$ est dérivable de dérivée : $f' : \cancel{x} \mapsto e^x + 2x + 1$.

2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + e^x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par somme, $x \mapsto x^2 + e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2x + e^x$.

En outre, $y \mapsto \frac{1}{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $y \mapsto -\frac{1}{y^2}$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + x^2 > 0$, par composition, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}.$$

3. Par composée, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h$ est dérivable en $x$ et

$$h'(x) = \left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \exp'\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} h(x).$$

4. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto -2x^{-3}$.

Donc, en utilisant le résultat de la question précédente, par produit, $h'$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h''(x) = -2x^{-3} h(x) + \frac{1}{x^2} h'(x)$$

$$= -\frac{2}{x^3} h(x) + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2} h(x)$$

$$= h(x) \left[ \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right]$$

$$h''(x) = \frac{h(x)}{x^4} (1 - 2x).$$

5. Posons : $j_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $j_2 : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$.

* $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $I$ de dérivée $x \mapsto 2x$, et strictement positive.
Or, $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $y \mapsto \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Donc par composée, $j_1$ est dérivable sur $I$, de dérivée $j_1' : x \mapsto 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

* De même, $j_2$ est dérivable sur $I$, et $\forall x \in I$, $j_2'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$.

* Par combinaison linéaire, $j_1 - j_2$ est dérivable sur $I$. De plus, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

* On conclut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $j$ est dérivable en $x$ et :

$$j'(x) = \left[ j_1'(x) - j_2'(x) \right] \exp\left( j_1(x) - j_2(x) \right)$$

$$= \left[ \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \right] j(x)$$

$$j'(x) = x \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) j(x)$$