Valentin Melot

9 jan. 2021

Corrigé du DS n° 5

Question de cours :

cf. cours

Exercice n° 1 :

A : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$.

Par somme, $A = +\infty$.

B : Par théorème,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{6x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{6x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

C : On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (fonction de référence).

Donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^x = +\infty$.

En outre, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$.

Par somme de limites, $C = +\infty$.

D : On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = 0$. Donc par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

De plus, $x e^{2x} = x \times \dfrac{1}{e^{-2x}} = -\dfrac{1}{\frac{e^{-2x}}{-2x}} \times \dfrac{1}{2}$.

Or, par croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc par composition, $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{-2x} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \to -\infty} x e^{2x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{\frac{e^{-2x}}{-2x}} \times \frac{1}{2} = 0$.

De même,

$\lim_{x \to -\infty} x^{14} e^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^{14}}} = 0$ par croissance comparée.

Enfin, $\lim_{x \to -\infty} -7x = +\infty$.

Par somme de limites, $D = +\infty$.

E. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (fonction usuelle)

$= 1$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Donc par opérations, $E = \frac{\pi}{2} \times 1 + 0 = \frac{\pi}{2}$.

F: On factorise au numérateur et au dénominateur par $\sqrt{x}$:

$$F = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}\left(5x^3\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + e^x\right)}{\sqrt{x}\left(x^4\sqrt{x}\, e^{7x} - 3\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{5x^3\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + e^x}{x^4\sqrt{x}\, e^{7x} - 3}$$

Or, $\lim_{x \to 0} x^3 = \lim_{x \to 0} x^4 = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0.$

$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$

$\lim_{x \to 0} 7x = 0$, donc par composition $\lim_{x \to 0} e^{7x} = 1$.

Par opérations, $F = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

G: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 = 1^-$, donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 - x^2 = 0^+$, donc

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$, d'où $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} -\frac{1}{1-x^2} = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Donc par composition, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) = 0$.

H: On remarque que 1 est une racine du trinôme $-2x^2 - x + 3$. Il peut donc être factorisé sous la forme $-2x^2 - x + 3 = -2(x-1)(x-\alpha)$, où α est la deuxième racine. On a alors par identification

du terme constant : $3 = -2 \times (-1) \times (-\alpha) = -2\alpha$,
d'où $\alpha = -\frac{3}{2}$.

Donc $$H = \lim_{x \to 1} \frac{-2(x-1)(x+3/2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} -2\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$H = -10.$$

I : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$.

Donc :

→ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$

Or, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} x = 0$.

Donc, d'après le théorème de limite par encadrement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

→ De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$x \leq x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq -x$$

Donc d'après le théorème de limite par encadrement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Donc $I = 0$.

J : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = (\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2).$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 2} -(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2)$

$$= -(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2+2)$$

Donc $J = -8\sqrt{2}$.

K : On transforme l'expression pour faire apparaître les conjugués :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

De même,

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}.$$

Donc $K = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

On factorise ensuite par $\sqrt{x}$:

$$K = \frac{1}{2} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$

Donc par composition de limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{2}{x}} = 1$$

Donc $K = \frac{1}{2}$.

<u>Exercice n°2 :</u>

1 : a - d
2 : a - b - d
3 : c
4 : a - d

Justifications détaillées :

1. On a affaire à une fonction homographique (ie sa courbe représentative est une hyperbole). Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$, et a pour limites aux bornes de ses intervalles de définition : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{8}$

$\lim_{\substack{x\to-1/4 \\ x<1/4}} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x\to-1/4 \\ x>-1/4}} = -\infty$

Donc :

(a) est vraie ($x = -\frac{1}{4}$ et $y = 3/8$ sont les équations des asymptotes recherchées.

(b) est fausse.

(c) est fausse (les limites à droite et à gauche ne sont pas égales)

(d) est vraie.

2. (a) est vraie. $-\frac{x^2}{3}$ a pour limites à gauche et à droite $-$ donc par composition $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = e^{-} = f(3)$.

(b) est vraie. En effet, $\lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$, donc par composition $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(c) est fausse. De même que pour b, cette limite est nulle.

(d) est vraie. En effet, d'une part, d'après le théorème de limite par encadrement, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$. D'autre part, f admet une limite en 0 (égale à 1). Donc par composition, $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$.

3. (a) est fausse. Par exemple, si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto |x|$ alors $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

et pour tout $x \in [-1,1]$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, mais $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{|x|} = \frac{|x|^2}{|x|} = |x|$, donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(b) est fausse. En effet, si l'on choisit g constante égale à 2, et f définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

alors f n'a pas de limite en 0 bien que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$ et g admet une limite finie (égale à 2) en 0.

(c) Soit D l'ensemble de définition de $\frac{f}{g}$ (ie l'ensemble des point en lesquels g ne s'annule pas). Pour tout $x \in D$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, donc $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$. Par passage à la limite dans les inégalités, on a : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(d) Faux. Contre-exemple : f constante égale à 0, et $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

4. (a) est vraie. En effet, supposons par l'absurde que g admet une limite en $+\infty$. Alors, sachant que $f(x) = g(x-1)$ et que $\lim_{x \to +\infty} x-1 = +\infty$, f admettrait une limite en $+\infty$ (par composition).

Ceci est contraire aux hypothèses. Donc (a) est vraie.

(b) Faux. Prenons par exemple $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$.
f n'a pas de limite en $+\infty$ (sinusoïde), mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \sin(2\pi n) = 0$, donc $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite en $+\infty$.

(c) Faux. On reprend dans le cours l'exemple de la fonction f valant :

$$\begin{cases} 1 & \text{sur les intervalles de la forme } [2k, 2k+1[, \ k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sur les intervalles de la forme } [2k+1, 2k+2[, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

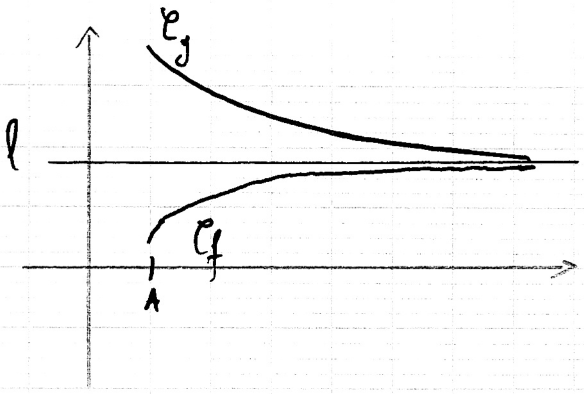
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = (-1)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$.

(d) C'est vrai. Supposons par l'absurde qu'il existe un tel intervalle $[A, +\infty[$. Alors quatre possibilités :

- Soit f est croissante sur $[A, +\infty[$ et majorée. f admet une limite finie en $+\infty$.
- Soit f est croissante sur $[A, +\infty[$ et non-majorée. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit f est décroissante sur $[A, +\infty[$ et minorée. f admet une limite finie en $+\infty$.
- Soit f est décroissante sur $[A, +\infty[$ et non-minorée. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Dans tous les cas, f admet une limite en $+\infty$.
C'est donc absurde, un tel intervalle n'existe pas.

Problème :



Puisque f est croissante, $-f$ est décroissante, et donc g étant décroissante, $g-f$ est également décroissante.

Montrons d'abord que pour tout $x \geq A$, $f(x) \leq g(x)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in [A, +\infty[$ tel que $f(x_0) > g(x_0)$. Soit $\alpha = g(x_0) - f(x_0)$. On a $\alpha < 0$. Or, $g-f$ étant décroissante, $\forall x \geq x_0$, $g(x) - f(x) \leq \alpha$. Or, d'après l'hypothèse (iii), $g-f$ a une limite en $+\infty$. Par passage à la limite, celle-ci est inférieure à α, ce qui est contraire à l'hypothèse (iii). Donc on a bien pour tout $x \in [A, +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$.

Alors, pour tout $x \geq A$, $f(x) \leq g(x) \leq g(A)$ par décroissance de g. Donc f, croissante et majorée, admet une limite l_f en $+\infty$.

De même, $\forall x \geq A$, $g(x) \geq f(x) \geq f(A)$ par croissance de f. Donc g est décroissante et minorée, donc admet une limite l_g.

Enfin, par différence de limites, $\lim\limits_{+\infty} g-f = l_g - l_f$, soit $0 = l_g - l_f$, d'où $l_g = l_f$. C.Q.F.D.

10/10