Quelques calculs de cardinalité

Valentin Melot

2016–2017

Tous les résultats qui suivent sont bien évidemment hors-programme. Malgré tout, il peut être intéressant d'essayer de comprendre leur signification profonde, de faire l'exercice, et pourquoi pas de tenter de les redémontrer une fois pendant les révisions en fin d'année...

Lemme 0.1 (Knaster-Tarski) *Soient X un ensemble, et $h : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ croissante (pour l'inclusion). Alors h admet un point fixe.*

Preuve : Posons $W := \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \subseteq h(Y)\}$ et $Y_0 := \bigcup_{Y \in W} Y$.

Soit $Y \in W$. On a $Y \subseteq Y_0$. Par croissance de h, $h(Y) \subseteq h(Y_0)$, et $Y \subseteq h(X)$ donc $Y \subseteq Y_0$. En prenant l'union sur $Y \in W$, l'on obtient : $Y_0 \subseteq h(Y_0)$.

Mais alors par croissance de h, $h(Y_0) \subseteq h(h(Y_0))$, c'est-à-dire que $h(Y_0) \in W$, d'où $h(Y_0) \subseteq Y_0$. Conclusion : $h(Y_0) = Y_0$.

Exercice 0.2 *En s'inspirant de cette preuve, démontrer que toute fonction croissante de $[0, 1]$ dans lui-même possède un point fixe.*

Théorème 0.3 (Cantor-Bernstein) *Soient E et F deux ensembles, tels qu'il existe $f : E \hookrightarrow F$ et $g : F \hookrightarrow E$ injectives. Alors il existe une bijection de E sur F.*

Preuve : Posons :

$$\begin{array}{cccc} h & : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & & Y & \longmapsto & E \backslash g\left(F \backslash f(Y)\right) \end{array}$$

L'on vérifie immédiatement que h est croissante. D'après le lemme de Knaster-Tarski, elle admet un point fixe Y_0. En d'autres termes, $E \backslash Y_0 = g\left(F \backslash f(Y_0)\right)$. f et g étant injectives, elles elles définissent deux bijections $\tilde{f} : Y_0 \xrightarrow{\sim} f(Y_0)$ et $\tilde{g} : F \backslash f(Y_0) \xrightarrow{\sim} E \backslash Y_0$, qui peuvent être recollées en une seule bijection $E \xrightarrow{\sim} F$.

En d'autres termes, on peut ordonner les cardinaux. Intuitivement, pour que E puisse s'injecter dans F, il faut que E soit « plus petit » que F. Le théorème prouve que si E est « plus petit » que F et F « plus petit » que E, alors ils ont même taille.

Question 0.4 *Que peut-on dire si f et g ne sont plus deux injections, mais deux surjections ?*

Il est possible de se ramener au résultat précédent en construisant deux bijections à partir de f et g, mais cela nécessite l'axiome du choix.

Pour les résultats suivants, il peut être intéressant de se rappeler que, si E, E', F, F' et G sont trois ensembles, alors :

— $F \approx F' \implies E^F \approx E^{F'}$;

— $E \approx E' \implies E^F \approx E'^F$;

— $(E^F)^G \approx E^{F\times G}$

La démonstration est simples, mais plus formelle qu'autre chose. Par contre, il est impératif de comprendre de façon intuitive ces résultats.

Question 0.5 *Que deviennent les deux premiers résultats si l'on suppose seulement $F \hookrightarrow F'$ et $E \hookrightarrow E'$? Et si $F \twoheadrightarrow F'$?*

Attention, il y a un piège !

Proposition 0.6 *$\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$ est équipotent à $\mathbf{R}$.*

Preuve : Il est trivial de construire une injection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$.

Pour construire une injection de $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{R}$, j'utilise une construction un peu différente de celle que j'ai proposée en colle, qui était en fait erronée. Elle se fait en plusieurs étapes.

Puisque $\mathbf{N} \approx \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}} \approx \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Nous allons donc montrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \approx \mathbf{R}$.

On sait que $\mathbf{R}$ s'injecte dans $[0,1[$, et que ce dernier ensemble s'injecte dans $[\![0,8]\!]^{\mathbf{N}}$ (en regardant non pas la décomposition en base 10, mais en base 9, vous comprendrez pourquoi après). Donc $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ s'injecte dans $\left([\![0,8]\!]^{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{N}} \approx [\![0,8]\!]^{\mathbf{N}^2} \approx [\![0,8]\!]^{\mathbf{N}}$. Les crochets gras désignent ici des intervalles d'entiers.

Puis $[\![0,8]\!]^{\mathbf{N}}$ s'injecte dans $[0,1[$ en associant à une suite le nombre dont ce sont les décimales. Pourquoi avoir regardé en base 9 et non en base 10 tout-à-l'heure ? Pour garantir, à cette étape, de ne jamais avoir de suite constante à neuf à partir d'un certain rang, ce qui poserait des problèmes d'injectivité ($(0,9,9,9,\dots)$ serait envoyée sur le même nombre que $(1,0,0,\dots)$, par exemple).

Exercice 0.7 *Écrire l'injection de $\left([0,1[^{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{N}}$ dans $[0,1[^{\mathbf{N}}$ ainsi obtenue (qui dépend bien entendu de la bijection $\mathbf{N}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}$ choisie).*

Enfin, on sait que $[0,1[$ s'injecte dans $\mathbf{R}$. En composant toutes ces injections, l'on a bien construit une injection de $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{R}$.

Par le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$.

Exercice 0.8 *Montrer que $\mathbf{Q}^{\mathbf{R}}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.*

Théorème 0.9 *$\mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est équipotent à $\mathbf{R}$.*

Preuve : De même que précédemment, il existe une injection $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Soit $\varphi : \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$ l'application de restriction $f \longmapsto f_{|\mathbf{Q}}$.

Exercice 0.10 *Montrer que φ est injective.*

C'est un simple exercice de sup', qui utilise la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$.

En composant cette injection avec la bijection $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$ obtenue précédemment, l'on obtient une injection $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \hookrightarrow \mathbf{R}$. On conclut avec le théorème de Cantor-Bernstein.

Je doute qu'il soit aisé de trouver une bijection à la main, si vous y arrivez, n'hésitez pas à m'envoyer un courriel !