

Simulations de la réforme « UDG »

La Délégation spéciale

Juin 2021

Résumé

Afin d'éprouver la robustesse du système proposé dans le cadre de la réforme dite « des UDG », nous simulons l'organisation du thurnage général dans des conditions diverses, plus défavorables que la réalité. Les thurnages généraux correspondant à 200 situations différentes, qui se suivent temporellement, sont simulés. Pour chaque situation, 10 000 répétitions du thurnage général sont réalisés afin d'étudier l'effet du hasard.

Dans toutes les situations testées, la garantie « 1 UDG = une thurne le soir du TG » est vérifiée. Le nombre de personnes thurnables est supérieur d'au moins 19 % au nombre de personnes misant 1 UDG, les garanties de logement étant prises en compte. La marge est généralement bien supérieure. Ces résultats sont observés alors que les joueurs simulés ont davantage tendance à faire valoir cette garantie que ce qui a été constaté sur les données réelles du thurnage blanc.

En outre, pour étudier les conséquences d'une mise comprise entre 0 et 1 au-delà de la probabilité d'être assigné à la catégorie argent ou bronze, nous calculons, dans chaque cas, une « probabilité empirique d'être thurné » *a posteriori*, et nous étudions les relations entre la probabilité et la mise. La corrélation entre les deux données est satisfaisante ($R^2 = 0.953$), mais subit des variations en fonction des années.

Table des matières

1	Interrogations auxquelles ces simulations visent à répondre	1
2	Présentation du modèle et des hypothèses	3
3	Résultats relatifs à la situation de chaque catégorie	8
4	Résultats relatifs à la probabilité empirique d'être logé	11
5	Réponses aux questions posées	23
6	Reproductibilité	24

1 Interrogations auxquelles ces simulations visent à répondre

La réforme proposée du thurnage, dite « UDG », repose sur la conception, chaque année, d'une « liste de thurnabilité » regroupant les personnes auxquelles une thurne est garantie dès le soir du thurnage général indépendamment des désistements. Pour essayer de faire partie de cette liste de thurnabilité, les normaliens dépensent une mise en UDG. Selon leur mise, ils sont assignés à l'une des catégories suivantes :

- Or, si leur mise est égale à 1.
- Argent ou bronze, si leur mise est comprise entre 0 et 1 (strictement). La probabilité d'être assigné à la catégorie argent est alors égale à la mise.
- Chocolat, si leur mise est nulle.

Les participants sont classés en fonction de leur mise au sein des catégories argent et bronze, puis départagés aléatoirement à mise égale. Les quatre catégories sont concaténées. La liste de thurnabilité est constituée des personnes les mieux classées, dans un nombre correspondant au nombre de thurnes disponibles le soir du TG. Ce nombre est ajusté pour tenir compte des besoins des normaliens bénéficiant d'une garantie de logement insuffisamment bien classés.

Une caractéristique essentielle du système est que les participants ont la garantie que **dépenser 1 UDG leur assure d'obtenir une thurne dès le soir du TG**, ou autrement dit que **la catégorie or est incluse dans la liste de thurnabilité en toutes circonstances**. Les simulations ont notamment pour but de **vérifier que cette garantie fondamentale est remplie**.

Première question — Dépenser 1 UDG à un thurnage général assure-t-il bien d'obtenir une thurne ?

Les mises strictement inférieures à 1 UDG peuvent être jugées difficile à interpréter. Par conception, le modèle proposé ne leur donne pas de sens intrinsèque, mais **le nombre d'UDG dont dispose un normalien doit correspondre à l'espérance** de son nombre d'années de thurnage. Nous avons souhaité vérifier à quelle point cette propriété restait vraie au niveau individuel, c'est-à-dire **si un normalien jouant une certaine mise peut s'attendre à ce que cette mise représente sa probabilité d'obtenir une thurne le soir du TG**.

Si cette propriété était vérifiée, alors il serait plus facile de guider les participants aux thurnages dans le choix de leurs mises.

Deuxième question — Dans quelle mesure la mise en UDG faite à un TG représente-t-elle la probabilité d'obtenir une thurne ?

2 Présentation du modèle et des hypothèses

Les simulations proposées visent à éprouver un modèle *minimaliste*, dans une situation par conception *plus défavorable* que ce qui est attendu dans la réalité.

2.1 Approche générale

2.1.1 Organisation d'une année

Chaque année, une nouvelle promotion est générée à partir de celle de l'année précédente : introduction de 350 nouveaux conscrits (200 élèves, 150 étudiants et SI), départ de l'internat des normaliens en dernière année. La durée de scolarité des normaliens est de 3 ou 4 ans selon leur statut. 50 % des normaliens prennent une prolongation de scolarité, et 20 % une deuxième. Il y a donc, chaque année, environ 1 500 personnes dans l'école. Pour simplifier, les normaliens de la SI sont identifiés à des étudiants bénéficiant d'une garantie de logement.

Chaque normalien a , selon sa situation personnelle, une certaine probabilité de participer au thurnage général. Sa mise est également déterminée de façon aléatoire, en fonction de son nombre d'UDG restantes, de sa situation et de si l'année est une année de pénurie ou non. Il est considéré que les normaliens bénéficiant d'une garantie de logement (étudiants boursiers et normaliens de la sélection internationale) la font valoir chaque année.

Le thurnage général est organisé conformément à la proposition de réforme « UDG » faite : chaque normalien est assigné à une catégorie (or, argent, bronze ou chocolat) en fonction de sa mise et d'un aléa. Par la suite, la « liste de thurnabilité » est établie.

L'attribution effective des thurnes (couloir par couloir) n'est pas faite, dans la mesure où elle n'affecte pas les réponses aux questions posées. Aucun désistement n'intervient. Aucun thurnage partiel n'est organisé en cours d'année.

2.1.2 Séries temporelles

Cette expérience est réitérée 200 fois. Le but n'est pas tant d'obtenir une vision sur l'avenir du système à 200 ans, que de pouvoir observer un certain nombre de situations rares pour les intégrer aux statistiques.

Les années se suivent, de sorte que les mises faites une année donnée affecteront les comportements des années suivantes. Ce choix permet d'expliquer certaines variations observées après les « mauvaises » années.

Le nombre de thurnes disponibles évolue chaque année, selon une trajectoire aléatoire (fig. 1). En revanche, la taille des promotions et leur taille « effective »¹ retenue pour le calcul du nombre d'UDG distribuées sont fixes, à respectivement 350 et 270 personnes. Autrement dit, la variabilité des années s'explique uniquement par :

- Le nombre de thurnes disponibles,
- Les comportements individuels aléatoires de mise.

1. C'est-à-dire, le nombre de normaliens de chaque promotion qui participent effectivement au thurnage pendant leur scolarité, ou encore le nombre de personnes s'inscrivant pour la première fois au TG chaque année.

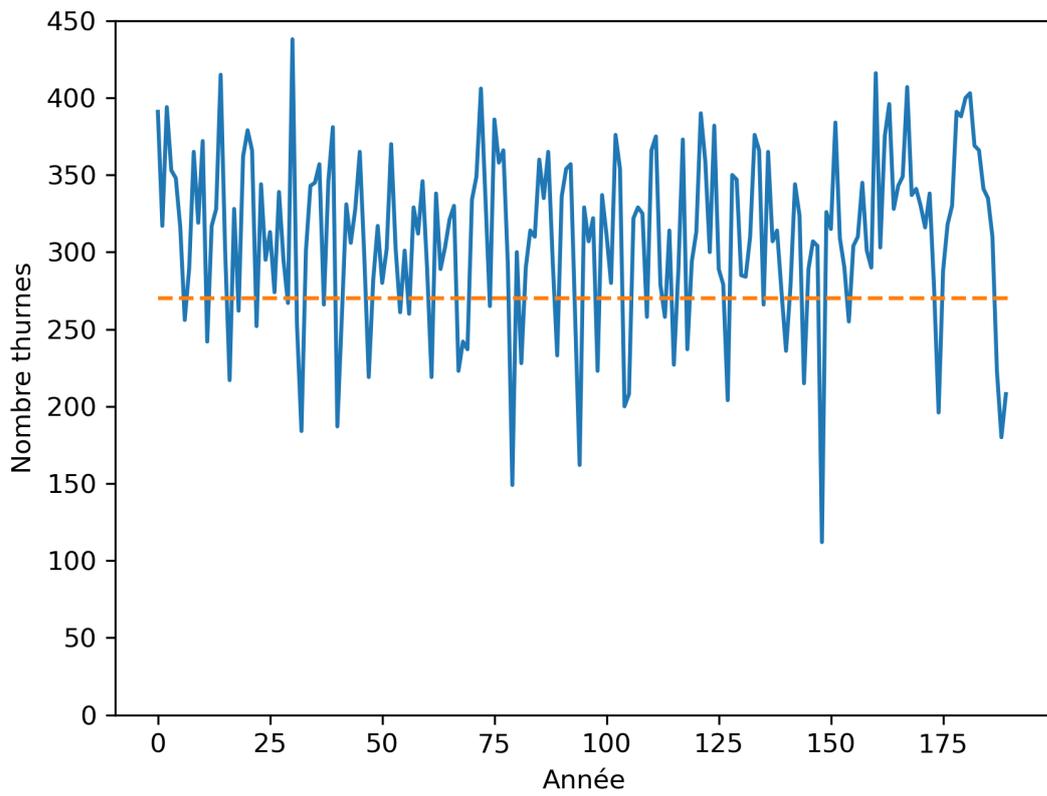


FIGURE 1 – Évolution du nombre de thurnes au cours du temps. Les pointillés oranges correspondent au niveau 270 thurnes, pour lequel la cible d'UDG est égale à 1 (c'est-à-dire que chaque normalien a une espérance de durée de thurnage d'un an).

Rappelons que le nombre maximal d'UDG pouvant être détenues est égal au ratio du nombre de thurnes disponibles sur la « taille de promotion effective », estimée par la DG. Cette estimation étant fixée à 270, la cible d'UDG est inférieure à 1 lorsque le nombre de thurnes est inférieur à 270, et supérieur lorsqu'il excède ce nombre. **41 des 190 années étudiées sont des années de pénurie** au cours desquelles les normaliens ont une espérance de durée de logement inférieure à 1 an².

Plutôt que d'initialiser le modèle avec des données réelles, ce qui posait de réelles difficultés d'implémentation³, le choix a été fait de partir d'une promotion vide et de ne pas tenir compte des dix premières années. Autrement dit, **les simulations n'ont pas vocation à prévoir l'évolution du système à compter de 2021**, mais à explorer un ensemble de situations possibles survenant selon une série temporelle.

Pour améliorer la lisibilité, les figures représentant l'évolution d'une variable au cours du temps ne feront figurer que les 30 premières années hors transition. En revanche, l'ensemble des statistiques données incluront les résultats des 190 années hors transition.

2.1.3 Reproduction des thurnages

Dans le but de répondre à la deuxième question, pour chaque année, une fois les mises des normaliens fixées, le thurnage général a été rejoué 10 000 fois. À chacune des reproductions, la répartition des normaliens entre les catégories bronze et argent, ainsi que l'ordre de départage des normaliens à égalité, varient.

2.2 Modélisation du comportement des normaliens

La principale difficulté de simulation tient à la méconnaissance des comportements des normaliens. Nous avons en effet peiné à collecter des données sur les stratégies adoptées par chaque normalien actuellement ou ce qu'elles seraient dans le nouveau modèle.

Il a en revanche été possible, à l'aide des données de *degette*, de déterminer certaines constantes relatives au thurnage. À titre d'exemple, le nombre d'inscrits à un thurnage général oscille généralement entre 400 et 500. Le nombre de conscrits participant est quant à lui de l'ordre de 220.

Par ailleurs, l'organisation d'un **thurnage blanc** en mai 2021 a permis de faire des observations sur le comportement des joueurs, et notamment sur leur propension à dépenser 1 UDG (c'est-à-dire à faire valoir leur garantie). Ainsi, 25 % des inscrits effectuaient une telle mise.

Aussi, nous avons choisi de **modéliser chaque personnage comme jouant de façon aléatoire chaque année parmi les mises possibles** en fonction de plusieurs paramètres, puis de vérifier *a posteriori* que les valeurs observées étaient compatibles avec les données de contrôle. Nous avons fait évoluer les probabilités considérées jusqu'à obtenir un niveau d'adéquation satisfaisant des variables de contrôle.

Les différents cas de figure considérés sont :

2. Cette donnée est purement exogène. Autrement dit, ce nombre est spécifié avant les simulations, et ne dépend donc pas du choix de la réforme UDG ou non.

3. Les données disponibles dans le logiciel *degette* ne permettent pas d'obtenir de statistiques fiables sur les personnes n'ayant jamais participé au thurnage.

- Conscrit, dont la stratégie dépend de si l'année considérée est une année de pénurie ou non.
- Ancien (deuxième année et plus) ayant déjà participé à un thurnage et obtenu une thurne, qui pourra chaque année chercher à rejouer. Si l'année considérée est sa dernière année, alors il dépense nécessairement toute sa mise.
- Ancien n'ayant jamais obtenu de thurne, qui a chaque année également une probabilité donnée de participer à un thurnage, mais cette probabilité est beaucoup plus faible.
- Normalien bénéficiant d'une garantie de logement, qui la fera valoir chaque année.

Les données de contrôle sont les suivantes :

- Nombre d'inscrits : attendu à au moins 400 chaque année, et pouvant régulièrement atteindre 500.
- Nombre d'inscrits pour la première fois : attendu à 270 environ. **Il s'agit d'une hypothèse du modèle.** Dans la réalité, l'évolution de cette valeur est libre. Si celle-ci évoluait de façon durable, alors la DG en tiendrait compte pour le calcul de la cible d'UDG.
- Nombre de conscrits participant : attendu à 220 environ.
- Proportion d'inscrits misant 1 UDG : attendu entre 20 % et 30 %. Afin d'éprouver le modèle à des conditions difficiles, nous avons fait le choix de monter certaines années jusqu'à 35 %.
- Proportion d'inscrits jouant entre 0 et 0.25 ; entre 0.25 et 0.5 ; entre 0.5 et 0.75 ; entre 0.75 et 1 UDG. Sans aller jusqu'à spécifier de valeur exacte, on s'assure que les valeurs observées pour l'une de ces catégories ne sont pas trop proches de 0.

Il est attendu qu'au cours des années de pénurie, les variables de contrôle aient un comportement différent. Ces années-là, personne ne peut miser 1 UDG. Le nombre d'inscrits et en particulier de conscrits diminue significativement.

La table 1 illustre l'évolution des variables de contrôle sur les 30 premières années.

2.3 Comparaison avec la réalité

Plusieurs éléments du modèle diffèrent par rapport à ce que serait la réalité de la réforme proposée. **On peut estimer que la réforme est davantage mise en difficulté par les simulations que ce qui surviendrait dans la réalité.** Ainsi :

- Aucun désistement ne survient le soir du thurnage ni par la suite. Les désistements permettent de descendre plus bas dans la liste des personnes appelées.
- Aucun thurnage partiel n'est organisé. Les TP permettent de faire diminuer le nombre d'UDG en circulation, ce qui réduit la pression des années suivantes.
- La proportion d'inscrits dépensant 1 UDG peut être surestimée par rapport à ce qui a été observé au thurnage blanc (jusqu'à 20 %).
- En revanche, le nombre de personnes effectuant des mises strictement inférieures mais proches de 1 est choisi plus faible qu'au thurnage blanc. Plus généralement, les normaliens qui ne dépensent pas 1 UDG jouent des mises inférieures à ce qui a été observé au thurnage blanc. Cela diminue donc le nombre d'UDG détruites chaque année, et augmente la pression des années suivantes.
- La variante du « boost » n'est pas mise en place. Cette variante permet également de diminuer le nombre d'UDG en circulation.

Inscrits	Dont 1 ^{re} inscription	Conscrits inscrits	Proportion d'inscrits par mise				
			Q1	Q2	Q3	Q4	1 UDG
> 400	≈ 270	≈ 220	>> 0				> 20 %
501	259	236	26.9 %	19.2 %	10.4 %	6.0 %	26.7 %
490	257	223	19.8 %	21.6 %	9.6 %	7.8 %	27.6 %
471	254	212	23.6 %	18.5 %	11.3 %	6.8 %	29.1 %
496	273	219	22.8 %	21.6 %	11.3 %	9.5 %	22.4 %
505	257	215	17.2 %	23.4 %	12.7 %	9.9 %	24.0 %
496	280	217	16.5 %	23.6 %	13.5 %	6.5 %	26.6 %
409	178	134	30.6 %	19.6 %	5.9 %	25.2 %	0.0 %
471	298	241	21.0 %	16.6 %	13.4 %	7.6 %	28.0 %
428	267	226	18.0 %	18.0 %	9.8 %	8.2 %	30.6 %
452	249	202	22.6 %	19.5 %	9.7 %	7.7 %	28.1 %
494	263	217	22.1 %	24.3 %	11.9 %	6.9 %	24.7 %
416	179	148	34.1 %	20.9 %	11.8 %	16.8 %	0.0 %
467	285	227	14.1 %	24.2 %	14.8 %	8.1 %	27.0 %
469	282	220	19.4 %	21.3 %	12.4 %	7.2 %	30.1 %
516	289	233	20.5 %	18.0 %	9.7 %	9.1 %	28.9 %
496	254	217	21.6 %	22.8 %	10.3 %	9.5 %	21.2 %
373	161	139	27.3 %	29.2 %	7.5 %	16.1 %	0.0 %
446	276	221	20.2 %	17.3 %	13.2 %	8.3 %	27.8 %
375	183	138	34.4 %	19.5 %	3.5 %	24.8 %	0.0 %
438	282	231	16.0 %	19.2 %	11.0 %	7.5 %	32.6 %
493	272	234	18.9 %	19.9 %	10.5 %	09.5 %	26.4 %
525	281	225	12.8 %	26.9 %	10.3 %	09.3 %	27.2 %
436	181	152	31.4 %	23.2 %	6.9 %	20.1 %	0.0 %
455	290	224	13.0 %	23.5 %	11.6 %	6.8 %	31.4 %
464	261	220	21.1 %	21.8 %	11.4 %	5.0 %	26.9 %
474	277	217	23.2 %	17.7 %	11.0 %	7.2 %	28.7 %
475	284	228	27.8 %	13.9 %	9.9 %	8.6 %	25.7 %
483	291	241	21.9 %	19.5 %	9.5 %	6.8 %	29.2 %
500	275	229	31.2 %	15.2 %	9.4 %	6.8 %	25.2 %
415	203	162	34.7 %	20.7 %	4.6 %	23.9 %	0.0 %

TABLE 1 – Évolution des variables de contrôle au cours des vingt premières années du modèle. La première ligne rappelle les valeurs cibles. Les lignes surlignées correspondent aux années de pénurie. Les colonnes Q1 à Q4 contiennent la proportion de personnes misant entre 0 et 0.25 UDG, 0.25 et 0.5 UDG, etc.

- La variante de la « clause de redistribution » n'est pas non plus mise en place. Cette variante permet de rectifier la distribution des UDG après une année de forte variabilité du nombre de logements, et donc de limiter le risque que le système soit mis en difficulté les années suivantes.

3 Résultats relatifs à la situation de chaque catégorie

3.1 Proportion de thurnés par catégorie

La figure 2 représente l'évolution, en fonction du temps, de la proportion de personnes dans chaque catégorie figurant sur la « liste de thurnabilité ». Les personnes de la catégorie bronze ne peuvent obtenir une thurne que si tous les inscrits de la catégorie argent sont eux-mêmes logés. Un inscrit en catégorie argent ne peut lui-même obtenir de thurne qu'une fois tous les inscrits de la catégorie or logés.

Les personnes bénéficiant d'une garantie de logement ne sont pas prises en compte.

On remarque que :

- En pratique, la catégorie or, lorsqu'elle existe, est toujours entièrement logée. Des précisions complémentaires sont présentées *infra*.
- En pratique, la catégorie argent est presque entièrement logée le soir du TG. En moyenne sur les 190 années considérées, 92 % de la catégorie obtient une thurne. Plus de 50 % des années, les membres de la catégorie sont tous logés.
- De même, en pratique, la catégorie bronze est rarement logée le soir du TG sans désistements. En moyenne sur les 190 années considérées, 11 % de la catégorie obtient une thurne. 40 % des années, aucun des membres de la catégorie n'obtient de thurne.
- Personne au sein de la catégorie chocolat n'est jamais thurné dès le soir du TG. La courbe correspondant à cette catégorie n'est donc pas représentée.

Pour confirmer ces chiffres, nous nous sommes également intéressés aux moyennes de ces proportions lorsque chaque thurnage est répété 10 000 fois. Les résultats pour les trente premières années sont présentés en figure 3. Les conclusions sont sensiblement identiques.

3.2 Marge sur le thurnage de la catégorie or

La figure 4 représente l'évolution au cours du temps du ratio entre le nombre de personnes obtenant une thurne et la taille de la catégorie or. **Cette valeur correspond à un « pire des cas » sur la répartition des garanties de logement** : en effet si les élèves bénéficiant d'une garantie de logement sont classés en haut de la catégorie argent, alors la marge est en réalité plus élevée.

On constate que, les années où cette catégorie existe, la marge est significative. Sur les 190 années testées, elle ne descend jamais en-dessous de 19 %, c'est-à-dire que le nombre de thurnes disponibles **pour les personnes autres que celles bénéficiant d'une garantie de logement** est toujours au moins 1,2 fois la taille de la catégorie or.

L'année où la marge est la plus faible est une année de quasi-pénurie, au cours de laquelle seulement 280 thurnes sont disponibles. La proportion d'inscrits dépensant 1 UDG est parmi les plus élevées : 31 %, soit parmi les 8 % d'années où ce taux est le plus

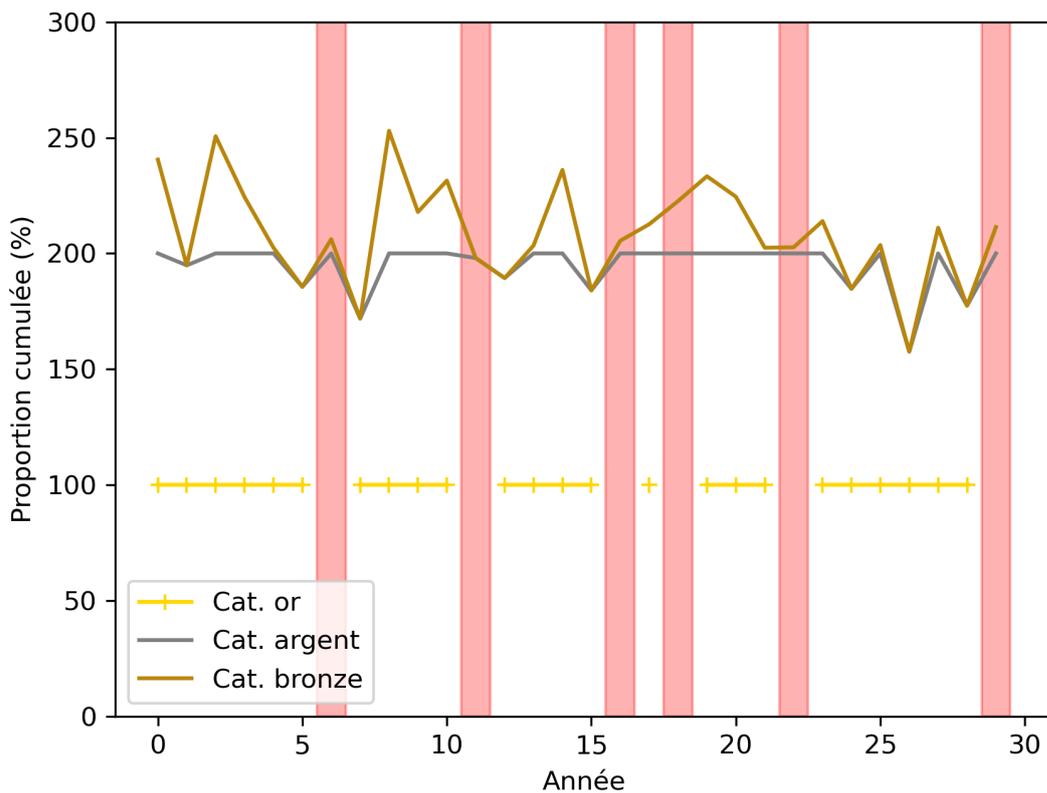


FIGURE 2 – Évolution de la proportion de membres de chaque catégorie thurnés au cours des trente premières années. Les zones rouges correspondent aux années de pénurie. Les probabilités sont représentées de façon cumulative, car une catégorie ne commence à être thurnée que si toute la catégorie supérieure a été entièrement thurnée.

Lecture : l'année 10, 100 % de la catégorie or, 100 % de la catégorie argent et 30 % de la catégorie bronze obtient une thurne. L'année 11, la catégorie or n'existe pas ; près de 100 % de la catégorie argent obtient une thurne ; et personne dans la catégorie bronze n'en obtient.

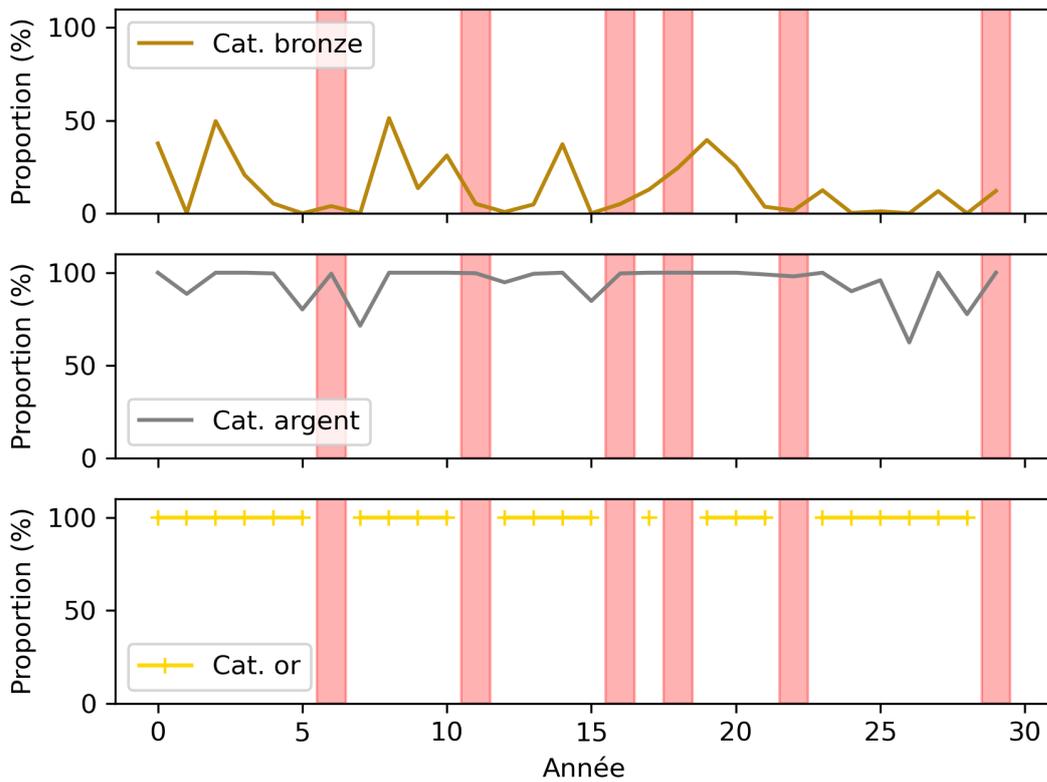


FIGURE 3 – Évolution de la proportion des membres de chaque catégorie thurnés au cours des trente dernières années, en moyenne sur 10 000 répétitions du thurnage général chaque année.

Lecture : l'année 22, la catégorie or n'existe pas. En moyenne, 98 % des membres de la catégorie argent sont logés, ainsi que 2 % des membres de la catégorie bronze.

Il peut arriver qu'une partie des inscrits bronze obtiennent un logement mais pas l'ensemble des inscrits argent, car il s'agit de moyennes sur un grand nombre de répétitions : les tirages où certains inscrits bronze sont logés ne sont pas les mêmes que ceux où certains inscrits argent ne sont pas logés.

élevé. Elle intervient dans un contexte dans lequel la taille de promotion effective est plus importante qu'escompté pour la troisième année de suite. **Dans un cas comme celui-ci, il est probable que la DG aurait réévalué à la hausse la taille de promotion effective, et que cible d'UDG aurait en fait été moins importante que simulé.** La catégorie or n'aurait en ce cas pas existé.

En dehors de deux années exceptionnelles comme celle-ci (sur 200 simulées), la marge n'est jamais inférieure à 35 %. Dans 93 % des cas, elle est supérieure à 50 %. Dans la moitié des cas, elle dépasse 100 %.

4 Résultats relatifs à la probabilité empirique d'être logé

4.1 Probabilité empirique en fonction de la mise

En simulant 10 000 occurrences de chaque thurnage, on obtient, pour chaque normalien, la *probabilité empirique* qu'il obtienne une thurne, c'est-à-dire la proportion de tirages pour lesquels une thurne est obtenue. Il n'est pas tenu compte pour ces statistiques des normaliens bénéficiant d'une garantie de logement.

La figure 6 représente, pour les 69 000 inscriptions à des thurnages effectués sur 190 ans, la corrélation entre la mise et la probabilité empirique d'obtenir une thurne. On remarque que pour les personnes misant moins de 0.4 UDG, la probabilité empirique est parfois sous-estimée, alors qu'au-dessus, elle est parfois sur-estimée.

Dans la régression $p_{\text{empirique}} = \text{mise}$, le coefficient de détermination⁴ R^2 est égal à 0.953. Autrement dit, la mise explique plus de 95 % de la probabilité d'obtenir une thurne. Il est raisonnable de supposer que les 5 % de variabilité restants relèvent essentiellement de conditions extérieures (choc de thurnes) ou imprévisibles (répartition des mises des normaliens).

La figure 5 retrace l'évolution de la valeur de R^2 au cours du temps dans ce modèle de régression. Celle-ci varie relativement peu. Seules quelques années de choc particulièrement violent du nombre de thurnes, au cours desquelles la probabilité de logement est toujours largement inférieure à la mise, donnent des valeurs inférieures à 0.8.

Il n'a malheureusement pas été possible de faire un calcul similaire dans le système de thurnage actuel pour comparer ces coefficients.

Intéressons-nous à la probabilité d'obtenir une thurne en fonction de la mise jouée, toutes années confondues. Pour établir cette grandeur, les normaliens sont regroupés par mise, selon des intervalles de longueur 0.05, puis l'on étudie la probabilité empirique moyenne d'être thurnée de chacun des groupes. Le résultat est produit en figure 7.

On étudie enfin l'écart entre mises et probabilités empiriques pour un thurnage donné, à mises fixées. La figure 8 représente différentes années au cours desquelles la mise correspond

4. Pour la régression $p_{\text{empirique}} = \text{mise}$, sans ordonnée à l'origine et avec coefficient directeur fixé à 1. La formule de calcul du R^2 est différente de celle utilisée pour le calcul du R^2 dans les régressions linéaires *classiques*. À ce sujet, on peut lire par exemple <https://stats.stackexchange.com/questions/26176/removal-of-statistically-significant-intercept-term-increases-r2-in-linear-model/26205#26205>.

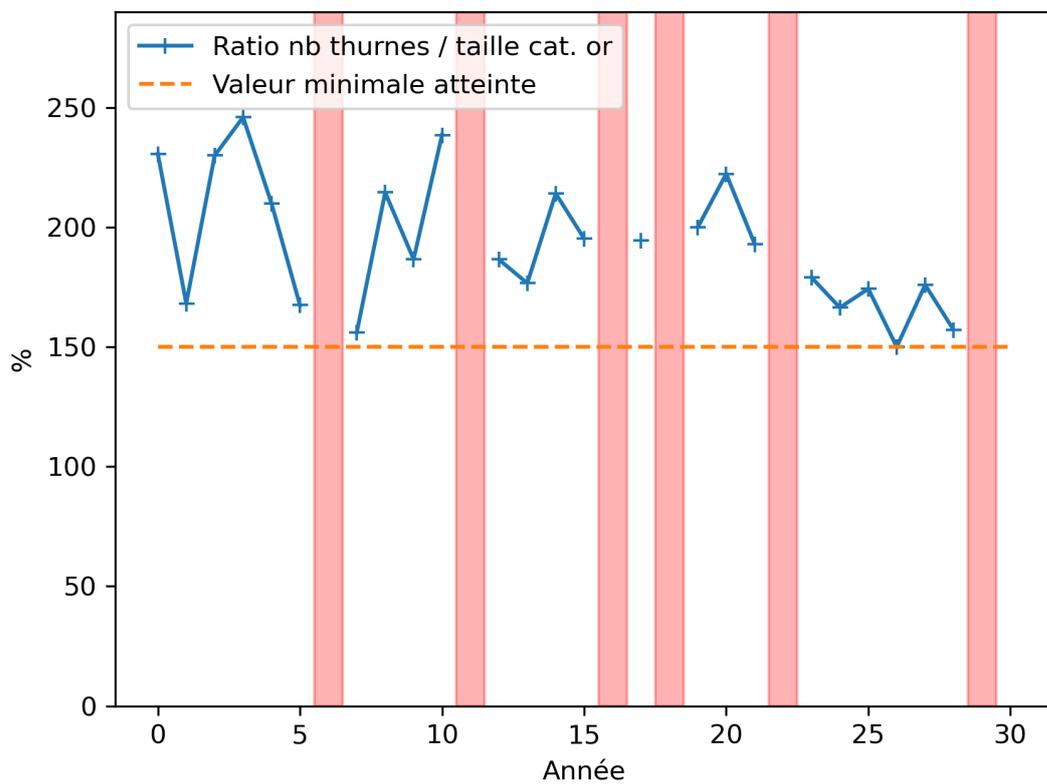


FIGURE 4 – Évolution au cours du temps de la marge de logement de la catégorie or.

Lecture : l'année 15, il y a 1,95 fois plus de thurnes disponibles que de personnes en catégorie or. L'année 16, la catégorie or n'existe pas, et ce ratio n'a donc pas de sens.

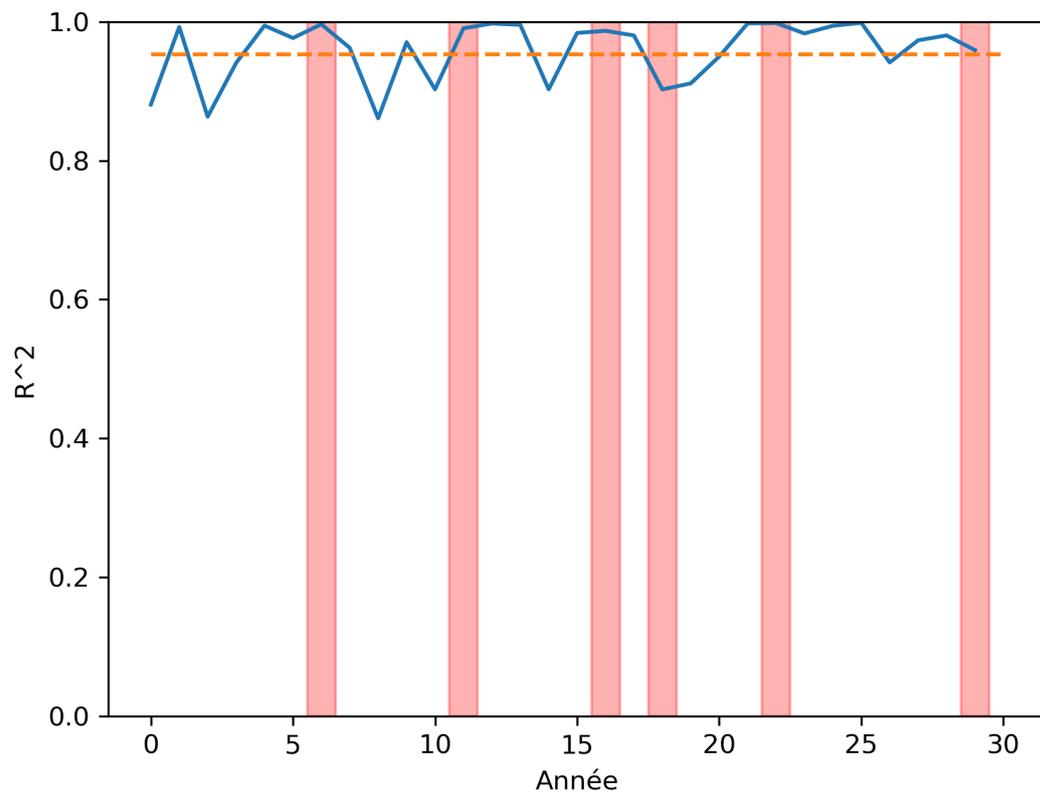


FIGURE 5 – Évolution du coefficient de détermination R^2 dans le modèle de régression $p_{\text{empirique}} = \text{mise}$. La courbe en pointillés correspond à la valeur de R^2 obtenue pour la régression sur l'ensemble des années.

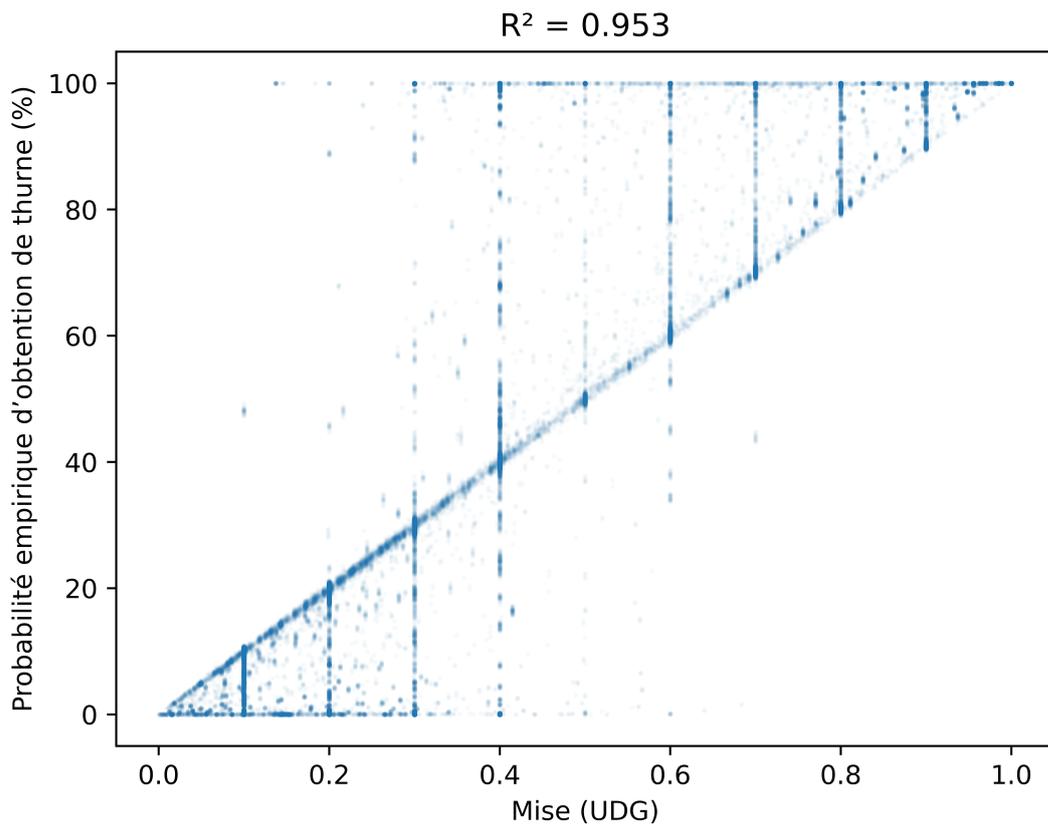


FIGURE 6 – Chaque point correspond à un normalien une année considérée. Les points sont translucides, de sorte que les zones les plus foncées correspondent aux situations du nombre le plus élevé de normaliens. La valeur du R^2 correspond au taux de corrélation entre la mise et la probabilité empirique.

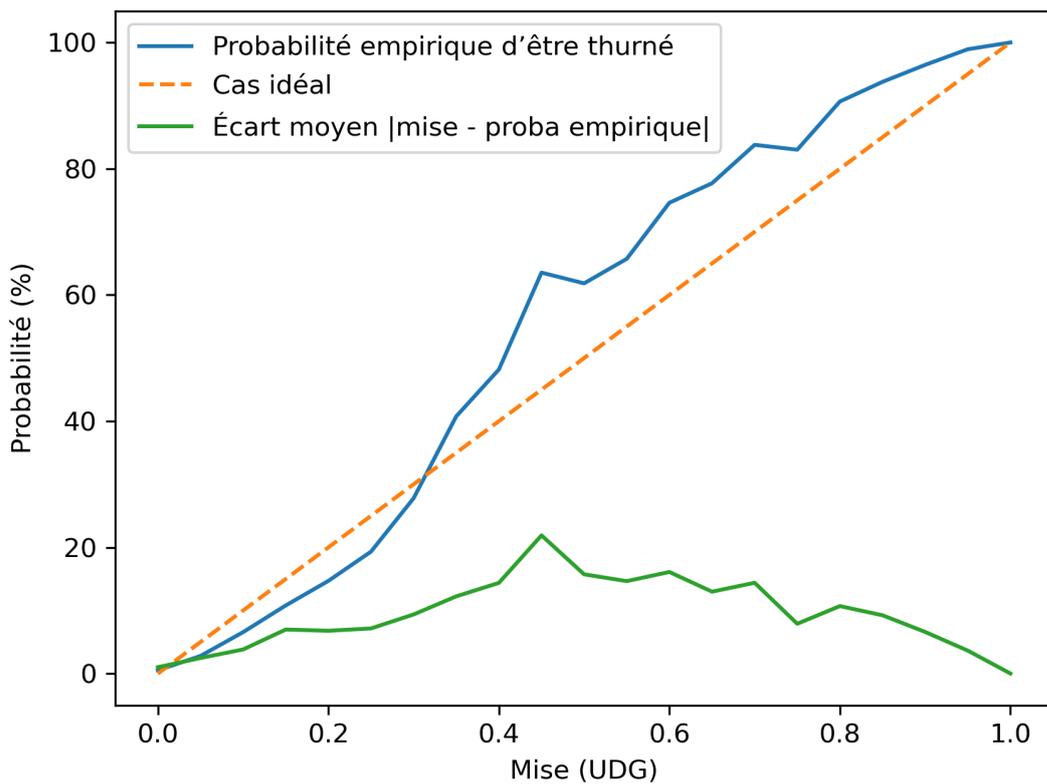


FIGURE 7 – Probabilité empirique d’obtenir une thurne en fonction de la mise sur l’ensemble des 190 années de simulation hors-transition ; et moyenne des écarts entre cette probabilité et la mise.

Lecture : sur l’ensemble des 1 900 000 simulations de thurnages généraux, les normaliens ayant misé 0.2 UDG (± 0.025) ont été thurnés dans environ 15 % des cas. Pour les normaliens de cette catégorie, l’écart moyen constaté entre la mise et la probabilité empirique de thurnage est de 7 %.

bien à la probabilité empirique. Certaines années la corrélation peut être plus imparfaite, notamment en cas de crise du logement (fig. 9).

Les décrochages sont observés en particulier pour les mises extrêmes. En effet, si le nombre de thurnes est important, alors le haut de la catégorie bronze obtiendra une thurne, et donc les personnes ayant dépensé suffisamment d'UDG seront thurnées à tous les coups. À l'inverse, si le nombre de thurnes est faible, alors les personnes ayant joué peu d'UDG n'obtiendront pas de thurne même en étant en catégorie argent, d'où des probabilités empiriques de logement inférieures à leur mise. La présence de personnes bénéficiant d'une garantie de logement, qui introduisent une rigidité contrainte dans le système, contribue également à expliquer l'écart entre mise et probabilité empirique de logement.

Rappelons que les probabilités ici indiquées sont des probabilités *de figurer en liste de thurnabilité*. Elles ne tiennent donc pas compte des désistements et réallocations le soir du thurnage puis en cours d'été.

4.2 Étude de l'écart absolu et de l'écart moyen

Nous avons par la suite étudié l'écart absolu entre la mise et la probabilité empirique d'être thurné. Autrement dit, dans un certain nombre de situations, nous avons calculé la répartition de la quantité $\delta = |m - p|$, où m représente la mise, et p la probabilité empirique d'être thurné.

La figure 7 montre l'évolution de δ en fonction de la mise, sur l'ensemble des années de thurnage. De façon intuitive, δ prend ses plus grandes valeurs pour les mises proches de 0.5 UDG : c'est en effet dans ces situations-là que l'incertitude à chaque tirage au sort est la plus élevée.

En figure 10, nous nous intéressons à la répartition de δ pour toutes les années confondues et toutes les mises confondues. L'on remarque que δ prend le plus souvent des valeurs très faibles. Pour 60 % des inscriptions, $\delta < 1$ %. Autrement dit, avant de participer à un thurnage, s'il ne dispose pas d'information particulière sur la mise des autres joueurs, un normalien peut s'attendre à ce que sa mise corresponde à sa probabilité empirique d'être thurné au pourcent près, avec 60 % de confiance sur cette attente.

En revanche, avec 70 % de confiance, il ne connaît sa probabilité empirique de thurnage qu'à 5 % près. Et avec 80 % de confiance, il ne la connaît qu'à 11 % près.

δ suit donc une distribution à queue épaisse (kurtosis supérieur à 8) : le plus souvent δ prend des valeurs proches de zéro, mais la probabilité d'occurrence de valeurs extrêmes décroît lentement.

Enfin, on s'intéresse, en figures 11 et 12, à l'évolution de certains indicateurs de δ en fonction du temps. On constate que chaque année, l'adéquation entre mise et probabilité empirique fonctionne toujours bien pour une majorité de normaliens. Ainsi, trois années sur quatre, l'adéquation fonctionne au pourcent près pour plus de la moitié des participants. En revanche, certaines années extrêmes, l'adéquation peut diminuer brutalement, c'est-à-dire que δ prend plus facilement des valeurs élevées.

On remarque en particulier que les valeurs élevées de δ sont plus souvent prises les années qui *suivent* les plus fortes pénuries, et non pas les années de pénuries elles-mêmes. Ce constat peut plaider pour mettre en place un mécanisme d'ajustement du nombre d'UDG dans les années suivant les pénuries (variante de la « clause de redistribution »).

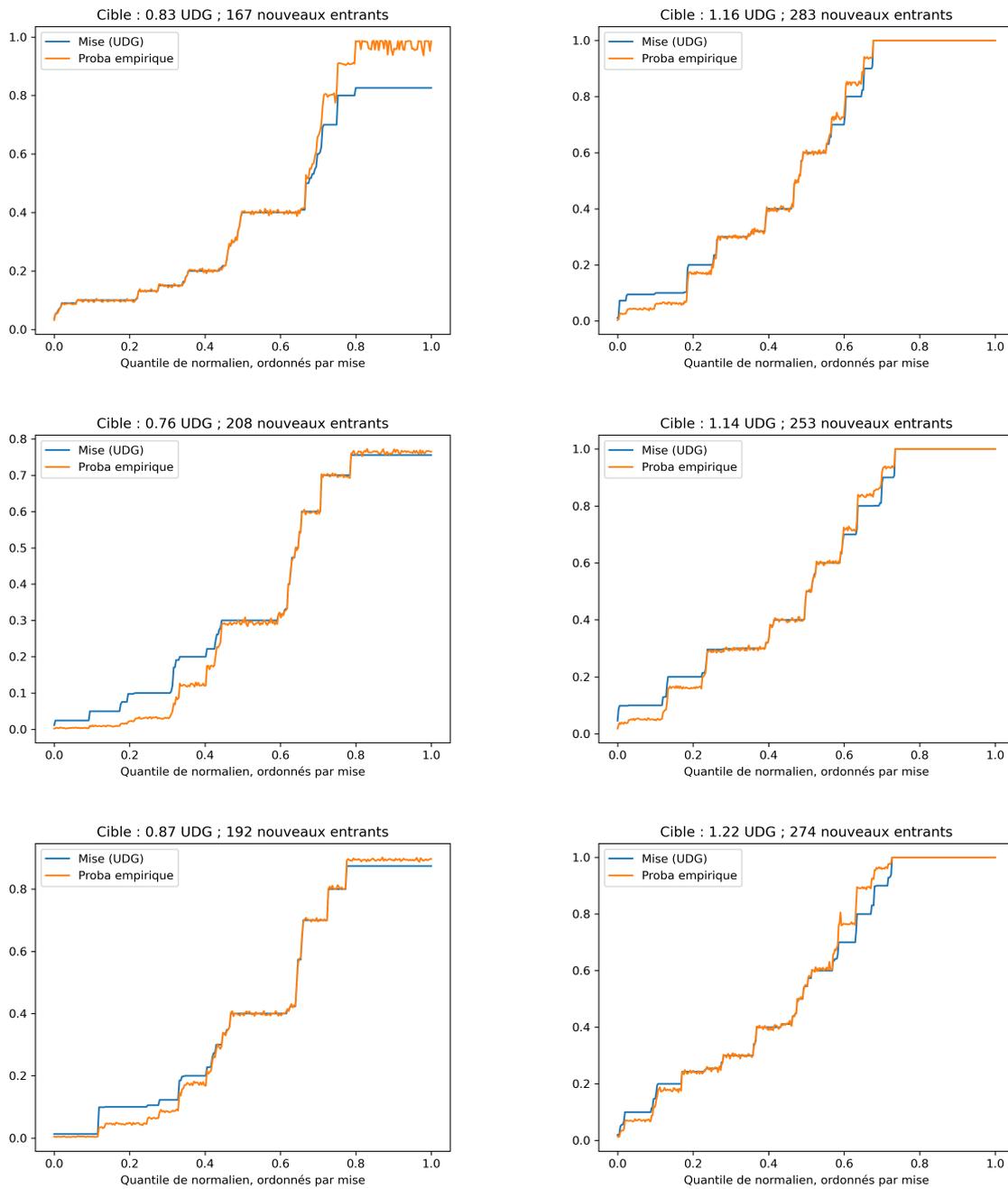


FIGURE 8 – Pour différentes années, répartition de la probabilité empirique d’obtenir une thurne en fonction de la mise.

Lecture pour le graphe en bas à droite : cette année-là, 60 % des normaliens ont joué moins de 0.7 UDG. Les normaliens ayant joué 0.7 UDG avaient, empiriquement, 0.76 % de chances d’obtenir une thurne.

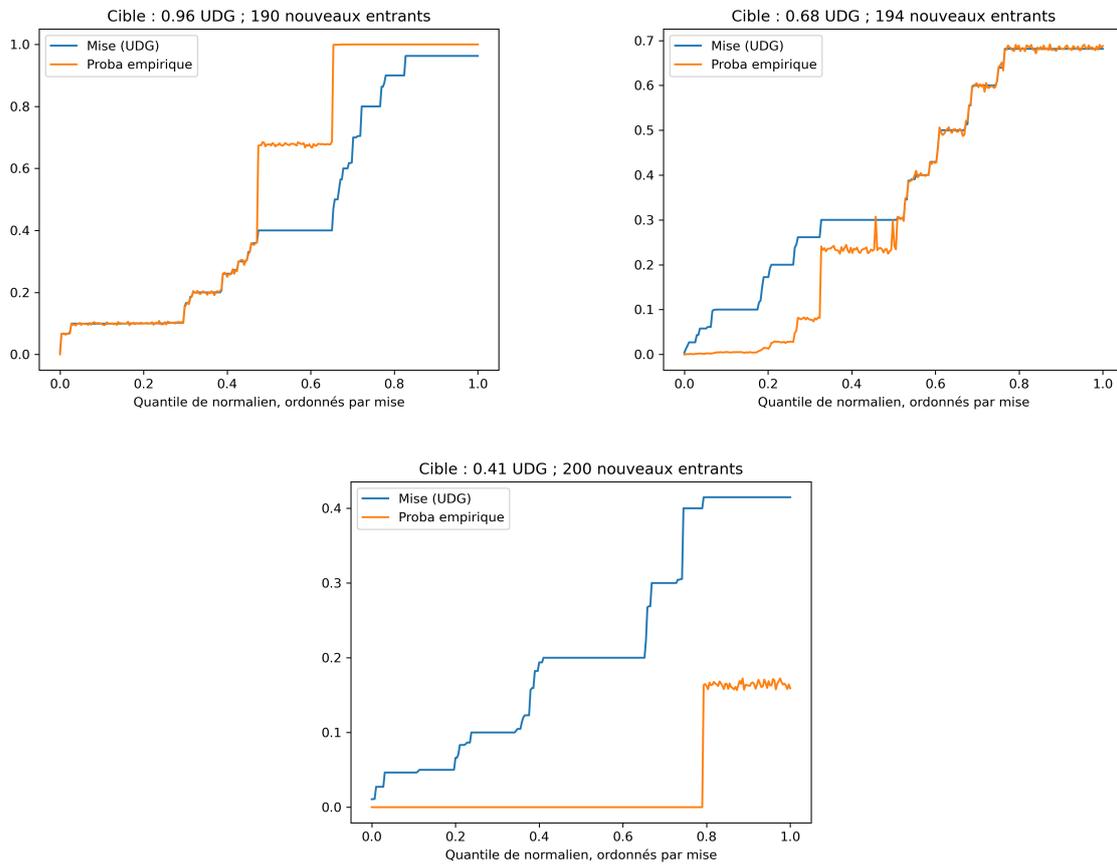


FIGURE 9 – Pour différentes années, répartition de la probabilité empirique d’obtenir une thurne en fonction de la mise.

Dans chacun des cas, la cible d’UDG est inférieure à 1. En haut à gauche, la rapide progression des mises proches de 1 et la grande disponibilité des thurnes (pénurie limitée) permet aux normaliens d’être en moyenne mieux thurnés que leur mise. Dans les deux autres cas, les normaliens sont en moyenne moins bien thurnés que leur mise. Le violent décrochage observé en bas correspond à une année de très forte pénurie, qui permet à seuls 20 % des inscrits sans garantie de logement d’être thurnés.

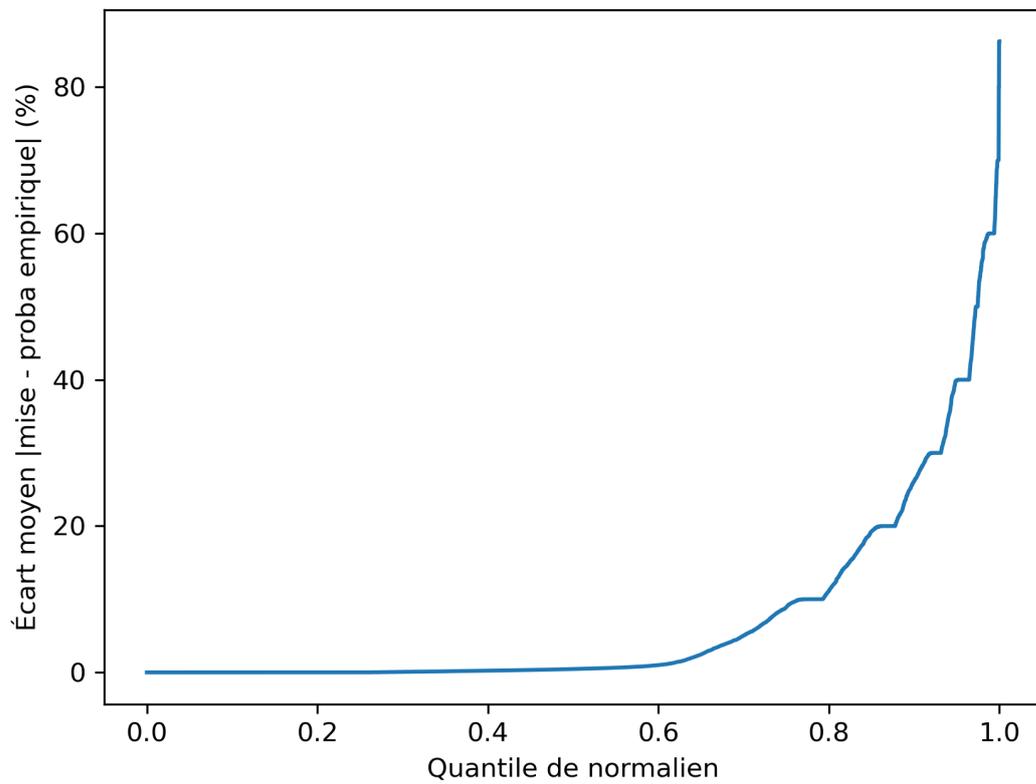


FIGURE 10 – Valeur des quantiles de δ sur l'ensemble des années et pour l'ensemble des normaliens.

Lecture : dans 50 % des cas, $\delta < 0.4$ %. Dans 80 % des cas, $\delta < 11$ %.

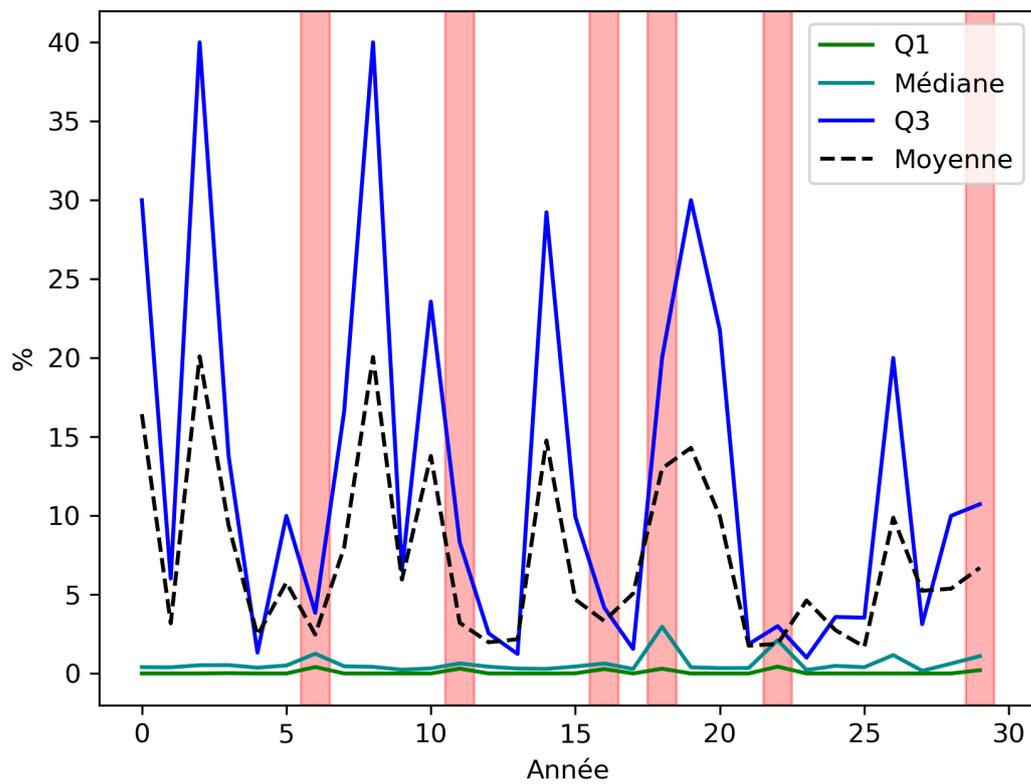


FIGURE 11 – Évolution des paramètres (quartiles, médiane et moyenne) de δ sur l'ensemble d'une promotion en fonction de l'année.

Lecture : l'année 15, pour au moins 25 % des normaliens, δ est nul ; pour 50 % des normaliens, $\delta < 0.4$ % ; pour 75 % des normaliens, $\delta < 10$ % ; et en moyenne, $\delta = 4.7$ %.

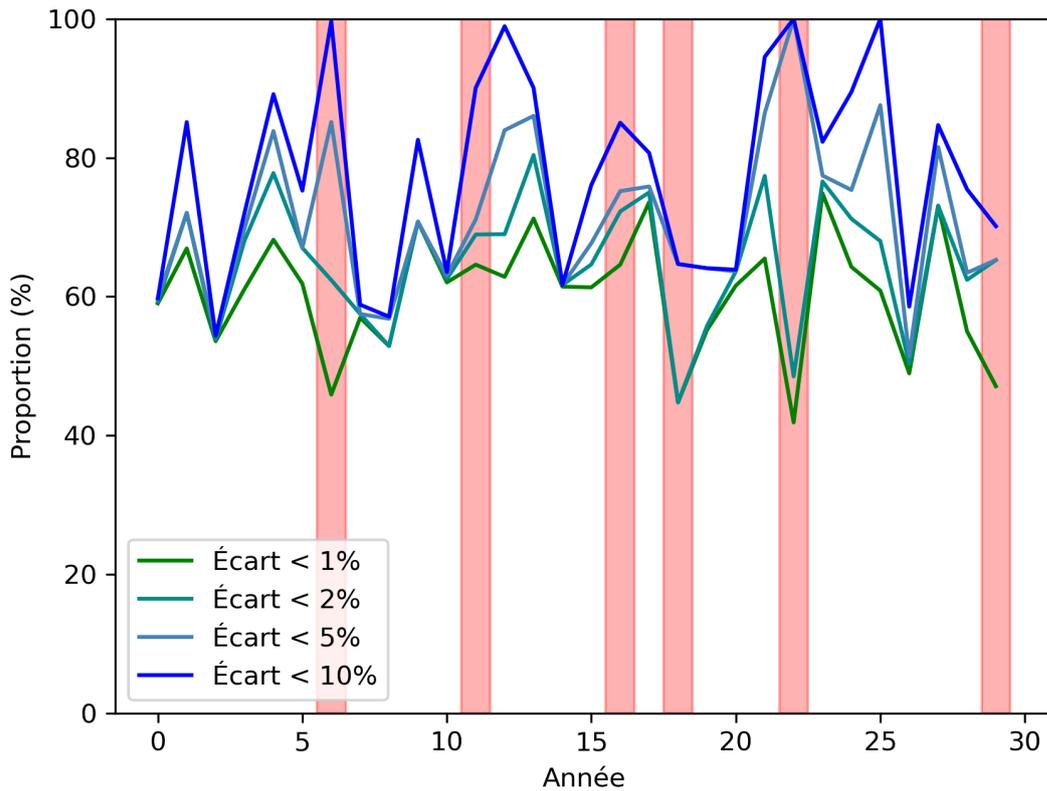


FIGURE 12 – Évolution des proportions de normaliens pour lesquels δ est inférieur à un certain seuil en fonction du temps. de δ sur l'ensemble d'une promotion en fonction de l'année.

Lecture : l'année 6 (qui est une année de pénurie), $\delta < 1\%$ pour 46 % des participants au TG. La même année, $\delta < 2\%$ pour 62 % des participants.

5 Réponses aux questions posées

5.1 Première question : garantie 1 UDG = une thurne

La garantie **1 UDG = une thurne le soir du thurnage** (c'est-à-dire : toute la catégorie or est incluse dans la liste de thurnabilité) est en pratique vérifiée chaque année. La variable la plus pertinente pour répondre à cette question est le taux de marge calculé en section 3.2, qui représente *dans le pire des cas*⁵ le nombre par lequel devrait être multipliée la taille de la catégorie or pour que la garantie ne soit plus remplie.

Le taux le plus défavorable atteint est 119 %, dans des conditions très particulières et qui semblent peu réalistes. Outre deux *outliers*, le ratio est toujours d'au moins 135 %, et dans plus de 90 % des cas d'au moins 150 %.

Ces résultats sont obtenus alors que le modèle est conçu pour être *plus défavorable que la réalité* en ce qui concerne le respect de cette garantie.

En conséquence, il est possible d'estimer avec un haut niveau de confiance que la garantie 1 UDG = une thurne le soir du thurnage général est bien respectée.

5.2 Deuxième question : corrélation entre mise et probabilité empirique de logement

Le fait que la mise corresponde à la probabilité empirique d'obtenir une thurne n'est pas une garantie du système proposé. Cependant, sur l'ensemble des inscriptions à des thurnages, la corrélation entre les deux grandeurs est bonne, avec un coefficient de détermination $R^2 = 0.953$. En d'autres termes, la mise explique à 95 % la probabilité empirique d'être thurnable dans le modèle $p_{\text{empirique}} = \text{mise}$. Pour chaque valeur possible de la mise, sur l'ensemble des années simulées, les deux grandeurs coïncident approximativement.

Les résultats sont en revanche plus défavorables sur certains thurnages. Certaines années où la cible d'UDG est inférieure à 1 en particulier, un décrochage significatif entre mise et probabilité empirique peut être observé. Celui-ci résulte d'effets de seuils liés à la taille du parc et à la priorité accordée aux personnes bénéficiant d'une garantie de logement.

La distribution individuelle de l'écart absolu entre mise et probabilité empirique suit une loi de probabilité à queue épaisse. Dans plus de la moitié des cas, les deux grandeurs coïncident à 0.4 % près. Cependant, dans seulement 80 % des cas, l'écart est de moins de 10 %. La variabilité année par année reste importante.

Une interprétation possible est que **la mise donne un bon *a priori* de la probabilité empirique de thurnage**, en l'absence d'autre information. En revanche *a posteriori*, des écarts plus importants sont possibles en fonction de variables difficiles à anticiper telles que la distribution précise des mises et le comportement des normaliens bénéficiant d'une garantie de logement.

5. C'est-à-dire : si le classement des personnes bénéficiant d'une garantie de logement est le plus défavorable.

En conséquence, il est possible de considérer que la mise donne un bon indicateur de la probabilité de figurer sur la liste de thurnabilité. Dans une logique de vulgarisation, indiquer que la mise correspond à la probabilité *a priori* de figurer sur cette liste peut sembler adéquat, mais il ne serait pas raisonnable d’effectuer de promesse ferme à ce sujet. Le débat sur l’adéquation exacte chaque année est de toute façon d’un intérêt limité en pratique, étant donné qu’un seul thurnage général est organisé chaque année dans la réalité.

6 Reproductibilité

L’ensemble des chiffres et figures ont été générés à partir du code à l’adresse https://git.eleves.ens.fr/melot/simulations-reforme-udg/-/blob/master/udg_lt_deviation_proba.py (commit 53f6e63a8dfddc193a0719bce3a934d9edfc2e3b).

Le code précise la graine (*seed*) utilisée pour initialiser les tirages aléatoires. Cette graine a été obtenue en concaténant des mots demandés sur le serveur IRC `ulminfo`, canal `#causeries`, le 3 juin 2021.

La détermination de la trajectoire de nombre de thurnes n’est en revanche pas reproductible. Pour éviter d’alourdir inutilement le code, et compte tenu de la difficulté de formuler des prévisions sur l’évolution du nombre de thurnes disponibles au cours du temps, cette trajectoire a été générée une fois pour toutes séparément.