Le théorème de Silver par la combinatoire borélienne

Apolline Louvet et Valentin Melot
Sous la direction de Noé de Rancourt

Juin 2016

Résumé

Il est bien connu que l'hypothèse du continu est indécidable dans ZFC, c'est-à-dire que l'on ne peut assurer dans ce système d'axiomes l'existence ou l'inexistence d'ensembles non dénombrables mais strictement moins puissants que $\mathbf{R}$, dont le cardinal est égal à $2^{\aleph_0}$. Cependant, prouver l'inexistence de tels ensembles devient possible sous certaines hypothèses de régularité.

Le théorème de Silver est l'un de ces résultats ; il assure que les ensembles des classes de certaines relations d'équivalence sont au plus dénombrables ou ont la puissance du continu. Il permet par ailleurs en établissant cette alternative de prouver une étape de la classification de ces relations par leur complexité.

Pour démontrer ce théorème, nous devrons d'abord établir un résultat préliminaire connu sous le nom de *dichotomie* $\mathcal{G}_0$. Pour ce faire, nous commencerons par nous placer dans le cadre des espaces polonais et présenterons la preuve d'un théorème dû à Cantor et Bendixon, similaire à celle de la dichotomie $\mathcal{G}_0$ mais bien moins technique. Nous étudierons ensuite les propriétés de deux classes d'ensembles : les analytiques, dont le comportement est intimement lié à celui des boréliens, et les Baire-mesurables, aux propriétés similaires aux ensembles mesurables dans la théorie de Borel et Lebesgue. Munis de ces outils, nous prouverons la dichotomie $\mathcal{G}_0$ et en déduirons le théorème de Silver, puis énoncerons une application et quelques résultats proches mais que nous n'avons pas démontré.

Nous nous baserons essentiellement sur les cours de théorie descriptive des ensembles [3] par David Marker et [7] par Christian Rosendal, ainsi que sur deux articles [4] [5] de Benjamin Miller, auteur de la preuve de la dichotomie $\mathcal{G}_0$ que nous présenterons.

Table des matières

Sauf mention contraire, on suppose les ordinaux munis de leur topologie discrète. L'exponentiation désignera sans plus de précision une exponentiation ensembliste, c'est-à-dire un produit cartésien itéré. Rappelons que ω est le plus petit ordinal infini (c'est-à-dire $\mathbf{N}$), ω_1 est le plus petit ordinal non dénombrable, et 2 est l'ensemble $\{0,1\}$.

Soient X un espace topologique et α un ordinal. X^α est muni de la topologie produit. $X^{<\alpha}$ désigne l'ensemble des familles à valeur dans X indexées par un ordinal $\beta < \alpha$. Pour $\sigma \in X^\alpha$ et $\beta < \alpha$, l'on note $\sigma_{\restriction\beta}$ la *restriction* de σ à β en tant qu'application. Si $\sigma \in X^\alpha$ et s'il existe un ordinal $\beta < \alpha$ tel que $\tau = \sigma_{\restriction\beta}$, alors on peut quitte à identifier une application à son graphe écrire $\tau \subseteq \sigma$. Si $\alpha = \beta + 1$ et $x = \sigma_\beta$, alors on écrit $\sigma = \tau \,^\frown x$. Enfin, si α et β sont des ordinaux, $\sigma \in X^\alpha$ et $\tau \in X^\beta$, alors $\sigma \,^\frown \tau$ est la famille définie dans $X^{\alpha+\beta}$ par $(\sigma \,^\frown \tau)_\xi = \sigma_\xi$ pour $\xi < \alpha$ et $(\sigma \,^\frown \tau)_{\alpha+\xi} = \tau_\xi$ pour $\xi < \beta$.

Si σ est une famille indexée par l'ordinal fini n, alors $|\sigma|$ désigne la *longueur* de σ, c'est-à-dire n.

Dans un espace métrique (X, d), $B_d(x, r)$ ou $B(x, r)$ en l'absence de confusion quant à la distance utilisée désignent la boule *ouverte* de centre x et de rayon r, et pour A une partie de X, $\mathrm{diam}(A)$ le diamètre de A.

Si (X, τ) est un espace topologique, l'on note $\mathscr{B}(X, \tau)$ l'ensemble de ses boréliens, c'est-à-dire la σ-algèbre engendrée par τ. S'il n'y a pas de confusion possible sur la topologie choisie, l'on s'autorisera par la suite à confondre un espace topologique avec l'ensemble sur lequel il est défini.

Dans toute la suite, nous utiliserons librement l'axiome du choix dépendant, strictement plus puissant que l'axiome du choix dénombrable :

Axiome 0.1 *Soient X un ensemble et R une relation binaire sur X. Si $\forall x \in X, \exists y \in X, xRy$, alors il existe une suite $(x_n)_{n<\omega} \in X^\omega$ telle que $\forall n < \omega$, $x_n R x_{n+1}$.*

Nous n'aurons cependant pas recours à des versions plus fortes de l'axiome du choix.

1 Espaces polonais

1.1 Arbres, espace de Cantor et espace de Baire

Définition 1.1 *On appelle $\mathcal{N} := \omega^\omega$ l'*espace de Baire *et $\mathcal{C} := 2^\omega$ l'*ensemble de Cantor*. Ces espaces sont munis de leur topologie produit.*

On pose par ailleurs $\mathcal{N}^* := \omega^{<\omega}$ et $\mathcal{C}^* := 2^{<\omega}$.

Pour $\sigma \in \mathcal{N}^*$, $\mathcal{N}_\sigma$ désigne le cône $\{\tau \in \mathcal{N} : \sigma \subseteq \tau\}$. De même, pour $\sigma \in \mathcal{C}^*$, $\mathcal{C}_\sigma := \{\tau \in \mathcal{C} : \sigma \subseteq \tau\}$.

Notons que $\mathcal{N}^*$ et $\mathcal{C}^*$ sont dénombrables mais que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ ont la puissance du continu.

La proposition suivante donne une description plus simple des topologies de $\mathcal{N}$, et de $\mathcal{C}$.

Proposition 1.2 *$\{\mathcal{N}_\sigma : \sigma \in \mathcal{N}^*\}$ (resp. $\{\mathcal{C}_\sigma : \sigma \in \mathcal{C}^*\}$) forme une base d'ouverts de $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{C}$), et ces ouverts sont fermés.*

Preuve : Il suffit de prouver le résultat sur $\mathcal{N}$, sa topologie induisant celle de $\mathcal{C}$.

Rappelons que les singletons de ω sont ouverts puisque la topologie est discrète ; par conséquent l'ensemble $\{U_m(n) : m, n < \omega\}$ où $U_m(n) := \{\sigma \in \mathcal{N} : \sigma_m = n\}$ forme une prébase d'ouverts de $\mathcal{N}$. Pour $\sigma \in \mathcal{N}^*$ avec $k = |\sigma|$,

$$\mathcal{N}_\sigma = \bigcap_{i<k} U_i(\sigma_i)$$

donc $\mathcal{N}_\sigma$ est un ouvert.

Réciproquement, pour $(m_i)_{i<k}, (n_i)_{i<k} \in \omega^k$,

$$\bigcap_{i<k} U_{m_i}(n_i) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{N}_\sigma$$

où l'union porte sur $\Sigma := \{\sigma \in \omega^M : \forall i < k, \sigma_{m_i} = n_i\}$ avec $M := \max\{m_i : i < k\}$.

Enfin, les $\mathcal{N}_\sigma$ sont fermés, puisque

$$\mathcal{N} \backslash \mathcal{N}_\sigma = \bigcup_{\tau \in \omega^{|\sigma|} \backslash \{\sigma\}} \mathcal{N}_\tau$$

est un ouvert. ∎

Définition 1.3 *Soit $(A, \sqsubset)$ un ensemble ordonné. On dit que A est un* arbre *si $\sqsubset$ est bien fondée*[1] *et si pour tout élément non minimal x de A, il existe un unique $y \sqsubset x$ tel que*

$$\forall z \in A, z \sqsubset x \implies z \sqsubseteq y$$

Un élément minimal est appelé une racine *de $(A, \sqsubset)$. Un élément maximal est appelé une* feuille*. Un arbre est dit* émondé *s'il ne possède pas de feuille. Une* branche *de A est une partie B totalement ordonnée telle que pour tous $(x, y, z) \in B^2 \times A$, $x \sqsubset z \sqsubset y \implies [z = x \vee z = y]$.*

Si $(A, \sqsubset)$ est un arbre, $(T, \prec)$ un ensemble muni d'une relation binaire et $(T_a)_{a \in A} \in T^A$ une famille telle que $(\{T_a : a \in A\}, \prec)$ soit un arbre, alors on dira que $((T_a)_{a\in A}, \prec)$ est un arbre indexé *par A. Si de plus l'application $a \longmapsto T_a$ est croissante (resp. décroissante), l'on parlera d'*arbre croissant *(resp. arbre décroissant).*

À noter que cette définition n'est pas canonique, l'on trouve de nombreuses définitions pas toujours compatibles des arbres dans la littérature.

Tout arbre possède une racine puisque l'ordre est bien fondé, mais celle-ci n'est pas nécessairement unique. Un arbre émondé est soit vide, soit réunion de branches infinies. De telles branches infinies sont bien ordonnées donc isomorphes à un ordinal infini, qui ne peut être que ω puisqu'il s'agit du seul à ne pas contenir d'ordinal limite. Notons que l'axiome du choix dépendant implique l'existence d'une branche infinie dans tout arbre émondé non vide.

Par exemple, $\mathcal{N}^*$ muni de la relation « est une restriction à un certain ordinal de » (identifiée à $\subseteq$) forme un arbre dont la suite vide $\varnothing$ est l'unique racine. Nous considérerons par la suite essentiellement, pour X un ensemble quelconque, des arbres décroissants d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ indexés par $(\mathcal{C}^*, \subseteq)$ ou $(\mathcal{N}^*, \subseteq)$.

L'intérêt sera généralement d'étudier le comportement suivant une branche infinie de l'arbre. Aussi, si $(T, \sqsubseteq)$ est un arbre, nous aurons recours à une opération de *dérivation* : T' sera défini comme T privé de ses feuilles. Notons que l'arbre dérivé d'un arbre T n'est pas nécessairement émondé ; l'on obtient un contre exemple en choisissant pour T un ordinal fini autre que 0 ou 1 (l'arbre dérivé de $(n + 2, <)$ est $(n + 1, <)$ et n en est une feuille).

1.2 Propriétés des espaces polonais

Définition 1.4 *Un espace métrique (X, d) est dit* polonais *s'il est séparable et complet. Un espace topologique X est dit* polonais *s'il est séparable et complètement métrisable.*

Seule la notion d'*espace topologique polonais* est standard, celle d'*espace métrique polonais* est spécifique à cette section afin de faciliter l'énoncé de certains résultats.

Les conditions de métrisabilité et de séparabilité impliquent immédiatement que tout espace topologique polonais possède une base dénombrable d'ouverts.

Proposition 1.5 *Soient X un espace polonais et $F \subseteq X$ fermé. F est polonais.*

Preuve : Soit d une métrique complète sur X induisant sa topologie ; d induit aussi la topologie de F, et (F, d) est complet. X possédant une base dénombrable d'ouverts, il en est de même pour F qui est donc séparable. ■

1. C'est-à-dire s'il n'existe pas de suite strictement décroissante de $(A, \sqsubset)$.

Tout espace discret au plus dénombrable est polonais pour la distance grossière $d(x,y) := \delta_x^y$. $\mathbf{R}$ est un espace polonais pour sa distance usuelle d. $([0,1],d)$ l'est aussi en tant que sous-espace fermé de $(\mathbf{R},d)$. Cependant $]0,1[$ n'est pas un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}$, *a fortiori* $(]0,1[,d)$ n'est pas complet. Toutefois, $]0,1[$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}$, montrons que la propriété d'être polonais est un invariant topologique.

Proposition 1.6 *Soient X et Y deux espaces topolegiques homéomorphes. Si X est polonais, alors Y est polonais.*

Preuve : Soient $\varphi : Y \longrightarrow X$ un homéomorphisme. φ envoie une partie dense dénombrable sur une partie dense dénombrable, donc Y est séparable. Donnons-nous une métrique complète d induisant la topologie de X et posons

$$\tilde{d} \ : \begin{array}{rcl} Y^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (y_0,y_1) & \longmapsto & d(\varphi(y_0),\varphi(y_1)) \end{array}$$

$\tilde{d}$ est immédiatement une distance sur Y. Par ailleurs, pour $y \in Y$ et $r > 0$, $B_{\tilde{d}}(y,r) = \varphi^{-1}\left(B_d(\varphi(y),r)\right)$ est ouvert, et si $U \subseteq Y$ est ouvert et $y \in U$, alors $\varphi(U)$ contient $\varphi(y)$ et est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(\varphi(y),r) \subseteq \varphi(U)$ et $B_{\tilde{d}}(y,r) \subseteq U$. Ainsi, $\tilde{d}$ est compatible avec la topologie de Y.

Par construction de $\tilde{d}$, φ est une isométrie entre (X,d) et $(Y,\tilde{d})$, donc $(Y,\tilde{d})$ est complet. ∎

$]0,1[$ est donc bien polonais en tant qu'espace topologique, mais pas en tant qu'espace *métrique* pour sa distance usuelle. C'est plus généralement le cas pour tout ouvert d'un espace polonais.

Lemme 1.7 *Soit (X,d) un espace métrique. Il existe une distance d' sur X majorée par 1, engendrant la même topologie et ayant les mêmes suites de Cauchy que d.*

Preuve : Posons pour $x,y \in X$, $d'(x,y) := \min(1,d(x,y))$. d' est majorée par 1 et conserve immédiatement les propriétés de symétrie et de séparation de d. Elle vérifie par ailleurs l'inégalité triangulaire : pour $x,y,z \in X$, si $d(x,y) \geqslant 1$ ou $d(y,z) \geqslant 1$ alors $d'(x,z) \leqslant 1 \leqslant d'(x,y) + d'(y,z)$, sinon

$$d'(x,z) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) = d'(x,y) + d'(y,z)$$

Pour tous $x \in X$ et $r > 0$, $B_{d'}(x,\min(r,1)) \subseteq B_d(x,r)$ et $B_d(x,r) \subseteq B_{d'}(x,r)$ donc les topologies de (X,d) et (X,d') sont les mêmes.

Enfin, puisque $d' \leqslant d$, toute suite de Cauchy pour d l'est pour d', et l'on vérifie immédiatement que les suites de Cauchy pour d' le sont pour d. ∎

En d'autres termes, si X est un espace polonais, alors on peut choisir une métrique complète majorée par 1 engendrant sa topologie.

Proposition 1.8 *Soient X un espace polonais et $U \subseteq X$. Si U est ouvert, alors U est polonais.*

Preuve : U est clairement un espace séparable. Donnons-nous une métrique d complète, induisant la topologie de X. L'on pose

$$\tilde{d}(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X\backslash U)} - \frac{1}{d(y, X\backslash U)} \right|$$

$\tilde{d}$ est bien définie puisque $d(x, X\backslash U) = 0 \iff x \in X\backslash U$, $X\backslash U$ étant fermé. La symétrie de $\tilde{d}$ est immédiate, et sa séparation découle du fait que $d(x,y) < \tilde{d}(x,y)$ et de la séparation de d. Enfin, l'inégalité triangulaire pour $\tilde{d}$ découle de celle pour d et de celle pour $|\cdot|$.

Soient $x \in U$ et $\varepsilon > 0$. Immédiatement, $B_{\tilde{d}}(x,\varepsilon) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$. Réciproquement, fixons $r := d(x, X\backslash U)$. $\varphi : \eta \longmapsto \eta + \frac{\eta}{r(r-\eta)}$ est croissante et continue sur $[0, r[$ et s'annule en 0; soit donc $\delta \in]0, r[$ tel que $\varphi(\delta) < \varepsilon$. Si $y \in B_d(x,\delta)$, alors l'inégalité triangulaire assure que $r - \delta < d(y, X\backslash U) < r + \delta$. Il suit que $\frac{-\delta}{r(r-\delta)} < \frac{1}{r} - \frac{1}{d(y, X\backslash U)} < \frac{\delta}{r(r+\delta)}$, d'où

$$\tilde{d}(x,y) < \varphi(\delta) < \varepsilon$$

en d'autres termes, $B_d(x,\delta) \subseteq B_{\tilde{d}}(x,\varepsilon)$. Donc d et $\tilde{d}$ induisent la même topologie sur U.

Soit enfin $(x_n)_{n<\omega}$ une suite de Cauchy pour la distance $\tilde{d}$. Puisque $d \leqslant \tilde{d}$, c'est aussi une suite de Cauchy pour d, elle converge *dans* X vers un élément x_∞. De façon similaire, $\left(\frac{1}{d(x_n, X\backslash U)}\right)_{n<\omega}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ muni de sa distance usuelle, donc est bornée, d'où $d(x_\infty, X\backslash U) > 0$ d'où $x \in U$. Donc $(U, \tilde{d})$ est complet.

Ainsi, U muni de la topologie induite par celle de X est un espace polonais. ■

Proposition 1.9 *Soit $(X_n)_{n<\omega}$ une famille d'espaces polonais. Alors $\prod_{n<\omega} X_n$ muni de la topologie produit est polonais.*

Preuve : Soit pour tout $n < \omega$, $(x_k^n)_{k<\omega}$ une suite dense dans X_n. Pour $\sigma \in \mathcal{N}^*$, l'on définit une suite y^σ en posant, $y_n^\sigma := x_{\sigma_n}^n$ si $n < |\sigma|$, y_n^σ quelconque sinon. Alors $\{(y^\sigma) : \sigma \in \mathcal{N}^*\}$ est dénombrable et dense dans $\prod_{n<\omega} X_n$.

Donnons-nous pour tout $n < \omega$, d_n une distance complète majorée par 1 induisant la topologie de X_n, qui existe d'après le lemme 1.7. Posons :

$$\begin{array}{rcccl} d & : & \left(\prod_{n<\omega} X_n\right)^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ & & (x,y) & \longmapsto & \sum_{n<\omega} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \end{array}$$

d définit une distance sur $\prod_{n<\omega} X_n$, vérifions qu'elle induit la topologie produit.

Soit U un ouvert de base de $\prod_{n<\omega} X_n$, de la forme

$$U := \prod_{n<N} U_n \times \prod_{N \leqslant n < \omega} X_n$$

avec les U_n des ouverts des X_n. Donnons-nous $(x_n)_{n<\omega}$ un élément de U. Pour $1 > \varepsilon > 0$ tel que $\forall n < N$, $B_{d_n}(x_n, \varepsilon) \subseteq U_n$, l'on a bien $B_d(x, 2^{-N}\varepsilon) \subseteq U$.

Réciproquement, pour $x \in \prod_{n<\omega} X_n$ et $\varepsilon > 0$, l'ouvert $\prod_{n<N} B(x_n, \varepsilon) \times \prod_{N \leqslant n < \omega} X_n$ contient x et est inclus dans $B_d(x, \varepsilon)$. d engendre bien la topologie du produit.

Enfin si $(x^k)_{k<\omega}$ est une suite de Cauchy de $\left(\prod_{n<\omega} X_n, d\right)$, alors pour tout $n < \omega$, $(x_n^k)_{k<\omega}$ est une suite de Cauchy de (X_n, d_n), donc converge vers un x_n^∞ ; et

$$x^k \xrightarrow[k\to\infty]{d} (x_n^\infty)_{n<\omega}$$

Par conséquent, $\left(\prod_{n<\omega} X_n, d\right)$ est complet. ∎

Ainsi, puisque ω est dénombrable discret donc polonais, $\mathcal{N}$ est polonais. De même, $\mathcal{C}$ ainsi que le *cube de Hilbert* $\mathbf{H} := [0,1]^\omega$ sont polonais. En réalité, l'on pourrait démontrer ([3], p. 3) que tout espace polonais est homéomorphe à une partie de $\mathbf{H}$.

Le résultat précédent reste bien sûr vrai pour un produit fini d'espace polonais, quitte à compléter le produit avec des singletons, polonais, ce qui ne change pas la topologie.

Lemme 1.10 (fermés emboîtés) *Soient (X,d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n<\omega}$ une suite décroissante de fermés de X tels que* $\mathrm{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *Alors $\bigcap_{n<\omega} F_n$ est un singleton.*

Preuve : La condition de décroissance des diamètres et la séparation de d assurent que l'intersection contient au plus un point. Il suffit donc de montrer qu'elle est non vide. Soit $(x_n)_{n<\omega}$ une suite vérifiant $\forall n < \omega,\ x_n \in F_n$. Alors $(x_n)_{n<\omega}$ est de Cauchy, donc par complétude converge, et par fermeture séquentielle sa limite est dans chacun des F_n. ∎

Lemme 1.11 *Soient (X,d) un espace métrique polonais, $\varepsilon > 0$ et $U \subseteq X$ ouvert ; alors il existe $(U_n)_{n<\omega}$ famille d'ouverts tels que*

(i) $\forall n < \omega$, $\mathrm{diam}\, U_n < \varepsilon$;

(ii) $U = \bigcup_{n<\omega} U_n = \bigcup_{n<\omega} \overline{U_n}$.

Preuve : Soit D un ensemble dénombrable dense dans X. L'ensemble

$$\Phi := \left\{B\left(a, 2^{-n}\right)\ : a \in D,\ n < \omega,\ 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2},\ \overline{B\left(a, 2^{-n}\right)} \subseteq U\right\}$$

est dénombrable ; on note $(U_n)_{n<\omega}$ ses éléments.

Soit alors $x \in U$; il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $2^{-n} < \varepsilon$ et $B(x, 2^{-n}) \subseteq U$. Alors $B(x, 2^{-n-1})$ contient un élément $a \in D$; et l'on a

$$x \in B(a, 2^{-n-1}) \subseteq \overline{B(a, 2^{-n-1})} \subseteq B(x, 2^{-n}) \subseteq U$$

donc $B(a, 2^{-n-1}) \in \Phi$. La condition (ii) est vérifiée. ∎

Théorème 1.12 *Soit X un espace polonais ; alors il existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continue surjective.*

Preuve : Choisissons une métrique complète d compatible avec la topologie de X, et appliquons récursivement le lemme 1.11 pour définir un arbre décroissant d'ouverts $(U_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ vérifiant :

(i) $U_\varnothing = X$;

(ii) $\forall \sigma \in \mathcal{N}^*$, $\sigma \neq \varnothing \implies \mathrm{diam}(U_\sigma) < 2^{-|\sigma|}$;

(iii) $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{N}^*$, $\sigma \subsetneq \tau \implies \overline{U_\tau} \subseteq U_\sigma$;

(iv) $\forall \sigma \in \mathcal{N}^*, U_\sigma = \bigcup_{n<\omega} U_{\sigma^\frown n}$.

Soit $x \in \mathcal{N}$; d'après le lemme 1.10, $\bigcap_{n<\omega} U_{x\restriction n} = \bigcap_{n<\omega} \overline{U_{x\restriction n}}$ est un singleton, que l'on note $\{\varphi(x)\}$. φ définit une application $\mathcal{N} \longrightarrow X$. Immédiatement, φ est surjective, et pour $x \in \mathcal{N}$ et $B(\varphi(x), 2^{-n})$ voisinage de base de $\varphi(x)$,

$$y \in \mathcal{N}_{x\restriction n} \implies \varphi(y) \in U_{x\restriction n} \implies \varphi(y) \in B\left(\varphi(x), 2^{-n}\right)$$

donc φ est continue. ■

Corollaire 1.13 *Tout espace polonais a cardinal au plus* $2^{\aleph_0}$.

Preuve : Immédiat, sachant que $\mathcal{N}$ a la puissance du continu. ■

1.3 Hypothèse du continu pour les fermés des espaces polonais

Définition 1.14 *Soit X un espace polonais. $P \subseteq X$ est dit* parfait *s'il est fermé et si aucun de ses points n'est isolé.*

Par exemple, $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}$ sont des ensembles parfaits. En réalité, tout ensemble parfait contient un plongement de $\mathcal{C}$.

Théorème 1.15 *Soient X un espace polonais et $P \subseteq X$ un ensemble parfait non vide. Alors il existe une injection continue $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow P$.*

Preuve : La preuve est proche de celle du théorème 1.12. Donnons-nous une métrique d complète compatible avec la topologie de X.

Soit $U \subseteq P$ un ouvert non vide ; alors il existe $V_0, V_1 \subseteq U$ ouverts non vides disjoints d'adhérence incluse dans U. En effet, P étant sans point isolé, U n'est pas un singleton. Soient donc $x_0 \neq x_1 \in U$. Par séparation, il existe $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon_0)$ et $B(x_1, \varepsilon_1)$ soient disjointes. D'autre part, il existe $r_0, r_1 > 0$ tels que $B(x_0, r_0) \subseteq U$ et $B(x_1, r_1) \subseteq U$. Donc $V_i := B(x_i, \min(\varepsilon_i, r_i/2))$ convient pour $i < 2$.

En itérant ce résultat, l'on obtient un arbre $(U_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{C}^*}$ tel que :

(i) $U_\varnothing := X$;

(ii) $\forall 0 < n < \omega, \forall \sigma \in 2^n$, U_σ est un ouvert non vide de X de diamètre strictement inférieur à 2^{-n} ;

(iii) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $\forall i \in 2$, $\overline{U_{\sigma^\frown i}} \subseteq U_\sigma$;

(iv) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $U_{\sigma^\frown 0} \cap U_{\sigma^\frown 1} = \varnothing$.

Les condition (ii) et (iii), la complétude de (X, d) et le lemme 1.10 (fermés emboîtés) assurent que pour tout $x \in \mathcal{C}$, $\bigcap_{n<\omega} U_{x\restriction n}$ soit un singleton $\{f(x)\}$. Par ailleurs, pour $x \in \mathcal{C}$ et $B_d(f(x), 2^{-n})$ voisinage de base de $f(x)$,

$$y \in \mathcal{N}_{x\restriction n} \implies f(y) \in U_{x\restriction n} \implies f(y) \in B_d(f(x), 2^{-n})$$

donc f est continue. ■

Le résultat suivant, à défaut d'être nécessaire dans la preuve du théorème de Silver dont ce mémoire est l'objet, est un premier exemple d'alternative du type hypothèse du continu pour des ensembles suffisamment réguliers, et se démontre de façon similaire à la dichotomie $\mathcal{G}_0$ étudiée ultérieurement.

Théorème 1.16 (Cantor – Bendixon) *Soient X un espace polonais et $F \subseteq X$ un ensemble fermé. Alors F est réunion d'un ensemble parfait et d'un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve : Soit $G \subseteq X$ un fermé. On définit sa *dérivée de Cantor – Bendixon* par

$$G' := \{x \in G : x \text{ n'est pas un point isolé de } G\}$$

$G' \subseteq G$, et G' est fermée puisque l'on n'a retiré que des points isolés, donc des ouverts. Par ailleurs, $G \backslash G'$ est dénombrable puisque constituée de points isolés d'un espace à base dénombrable. En revanche, G' peut contenir des points isolés : par exemple pour $G := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : 0 < n < \omega\right\}$, $G' = \{0\}$ est un singleton, donc un point isolé.

Pour tout ordinal α, on définit $F^{(\alpha)}$ de la façon suivante :

(*i*) $F^{(0)} = F$;

(*ii*) $F^{(\alpha+1)} := \left(F^{(\alpha)}\right)'$:

(*iii*) Si α est un ordinal limite, $F^{(\alpha)} := \bigcap_{\beta<\alpha} F^{(\beta)}$.

$\left(F^{(\alpha)}\right)_{\alpha<\omega_1}$ est une famille décroissante. De plus, il existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tel que $F^{(\alpha)} = F^{(\alpha+1)}$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas, et donnons-nous $(U_n)_{n<\omega}$ une base dénombrable d'ouverts. Pour tout $\alpha < \omega_1$, on pourrait trouver un $n_\alpha < \omega$ tel que U_{n_α} isole un point de $F^{(\alpha)}$, c'est-à-dire tel que $F^{(\alpha)} \cap U_{n_\alpha}$ soit un singleton. En particulier, $U_{n_\alpha} \cap F^{(\alpha+1)}$ serait vide. Il vient alors que n_α n'isolerait pas de point de $F^{(\beta)}$ pour $\beta < \alpha$; sinon puisque $F^{(\alpha)} \subseteq F^{(\beta+1)}$, l'intersection de U_{n_α} et $F^{(\alpha)}$ serait vide, contredisant la définition de U_{n_α}. Donc

$$\begin{array}{ccc} \omega_1 & \longrightarrow & \omega \\ \alpha & \longmapsto & n_\alpha \end{array}$$

serait injective, ce qui est impossible.

Soit donc $\alpha < \omega_1$ tel que $F^{(\alpha)} = F^{(\alpha+1)}$. On a :

$$F = F^{(\alpha)} \ \cup \ \bigcup_{\beta<\alpha} F^{(\beta)} \backslash F^{(\beta+1)}$$

avec $F^{(\alpha)}$ parfait, et $\bigcup_{\beta<\alpha} F^{(\beta)} \backslash F^{(\beta+1)}$ réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc dénombrable. ∎

Corollaire 1.17 *Soit X un espace polonais et $F \subseteq X$. Si F est fermé, alors soit F est au plus dénombrable, soit F a la puissance du continu.*

Preuve : Écrivons F soit la forme $F =: P \cap D$ avec P parfait et D au plus dénombrable. Si P est vide, alors F est au plus dénombrable. Sinon, $\mathcal{C}$ se plonge dans P, donc F a au moins la puissance du continu. Or, nous avons vu que X avait au plus la puissance du continu ; donc F est de cardinal $2^{\aleph_0}$. ∎

La section suivante nous permet, entre autres, d'assurer que ce résultat reste vrai si F n'est pas simplement fermé mais borélien. Plus généralement, nous montrons que les propriétés concernant *un* fermé d'un espace polonais sont aussi vraies pour un borélien de cet espace.

1.4 Changements de topologie

Définition 1.18 *Soient X et Y deux espaces topologiques disjoints. L'on définit $X \amalg Y$ comme la réunion $X \cup Y$, munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions d'un ouvert de X et d'un ouvert de Y.*

Lemme 1.19 *Soient X et Y des espaces polonais. $X \amalg Y$ est un espace polonais.*

Preuve : $X \amalg Y$ est immédiatement séparable.

Soient d_X et d_Y des distances complètes majorées par 1 sur X et Y induisant leur topologie respective. L'on définit $d_{X \amalg Y} : X \cup Y \longrightarrow \mathbf{R}_+$ par :

- $d_{X \amalg Y}(x, x') := d_X(x, x')$ si $x, x' \in X$;
- $d_{X \amalg Y}(y, y') := d_Y(y, y')$ si $y, y' \in Y$;
- $d_{X \amalg Y}(x, y) := 2$ sinon.

$d_{X \amalg Y}$ est une distance sur $X \amalg Y$, dont elle induit la topologie. Par ailleurs, si $(u_n)_{n<\omega}$ est une suite de Cauchy de $(X \cup Y, d_{X \amalg Y})$, alors il existe $n_0 < \omega$ tel que $\mathrm{diam}(\{u_n : n_0 \leqslant n < \omega\}) < 1$, donc $\{u_n : n_0 \leqslant n < \omega\}$ est inclus soit dans X, soit dans Y. Dans le premier cas, $(u_n)_{n_0 \leqslant n < \omega}$ est une suite de Cauchy de (X, d), donc converge dans X, et donc dans $X \amalg Y$. Le second cas est similaire. ∎

Définition 1.20 *Soient (X, τ) un espace polonais et A une partie de X. L'on dit qu'une topologie τ^* sur X* trivialise *A pour τ si :*

(i) τ^* *est polonaise ;*

(ii) τ^* *est plus fine que τ, c'est-à-dire $\tau \subseteq \tau^*$;*

(iii) A *est ouverte et fermée dans (X, τ^*) ;*

(iv) $\mathscr{B}(X, \tau) = \mathscr{B}(X, \tau^*)$.

Le point *(iv)* équivaut à *(iv')* : τ et τ^* engendrent les mêmes σ-algèbres.

Lemme 1.21 *Soit (X, τ) un espace topologique polonais. Supposons que $F \subseteq X$ soit fermé. Alors, il existe une topologie τ^* trivialisant A pour τ.*

Preuve : Appliquons le lemme précédent à F et $X \backslash F$ munis des topologies induites par τ, polonais respectivement d'après les propositions 1.5 et 1.8 : l'on obtient sur X une topologie τ^* dans laquelle F est ouvert et fermé. Si U est ouvert dans (X, τ), alors $U = (U \cap F) \cup (U \backslash F)$ est un ouvert de (X, τ^*). D'autre part, si U est ouvert dans τ^* alors soit $U \cap F = \varnothing$ auquel cas U est un ouvert de X ; soit $U = (U \cap F) \cup (U \backslash F)$ avec $U \cap F$ ouvert dans F donc borélien de (X, τ) et $U \backslash F$ ouvert dans $X \backslash F$ donc dans X, donc borélien de (X, τ). Par conséquent, $\mathscr{B}(X, \tau) = \sigma(\tau) = \sigma(\tau^*) = \mathscr{B}(X, \tau^*)$. ∎

Généralisons ce résultat aux boréliens.

Lemme 1.22 *Soient (X, τ) un espace polonais, $(A_n)_{n<\omega}$ des parties de X et pour tout $n < \omega$, τ^n une topologie sur X trivialisant A_n pour τ. Il existe une topologie τ^* sur X telle que pour tout $n < \omega$, τ^* trivialise A_n pour τ^n, et* a fortiori *pour τ.*

Preuve : D'après la proposition 1.9, $\mathcal{X} := \prod_{n<\omega}(X, \tau^n)$ est un espace polonais. Soit

$$\begin{array}{rccl} j : & X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & x & \longmapsto & (x)_{n<\omega} \end{array}$$

Les τ^n raffinant τ, la topologie de $\mathcal{X}$ est plus fine que celle de $(X,\tau)^\omega$. Or, τ est séparée, donc la diagonale $j(X)$ est fermée dans $(X,\tau)^\omega$, et *a fortiori* dans $\mathcal{X}$. D'après les propositions 1.9 et 1.5, $j(X)$ est polonais pour la topologie induite par $\mathcal{X}$.

Soit τ^* la topologie initiale sur X pour l'application j. j est bijective sur son image et continue. De plus si $U \in \tau^*$, alors U est de la forme $j^{-1}(V)$ où V est un ouvert de $\mathcal{X}$. Donc $j(U) = V \cap j(X)$ est ouvert dans $j(X)$. Ainsi, j^{-1} est continue, et (X,τ^*) et $j(X) \subseteq \mathcal{X}$ sont homéomorphes ; aussi d'après la proposition 1.6 (X,τ^*) est-il polonais.

Pour tout $n < \omega$, τ^n est séparable et métrisable donc possède une base dénombrable d'ouverts $\mathcal{O}_n$. $\{\{f \in X^\omega : f_n \in U\} : n < \omega,\ U \in \mathcal{O}_n\}$ forme une prébase de $\mathcal{X}$; donc son image réciproque par j est une prébase de (X,τ^*), notée $\mathfrak{P}$. Remarquons que $\mathfrak{P} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{O}_n$. Par conséquent τ^* est plus fine que chacune des τ^n ; en particulier $\mathscr{B}(X,\tau) \subseteq \mathscr{B}(X,\tau^*)$.

Par ailleurs, les éléments des $\mathcal{O}_n$ sont des boréliens de (X,τ^n), donc de (X,τ). De plus, $\mathfrak{P}$ étant dénombrable, $\tau^* \subseteq \sigma(\mathfrak{P})$. Donc $\mathscr{B}(X,\tau^*) \subseteq \sigma(\mathfrak{P}) \subseteq \mathscr{B}(X,\tau)$.

Enfin, pour tout $n < \omega$, A_n étant un ouvert de τ^n, c'est un ouvert de τ^*. Il en est de même pour A_n^c, donc τ^* trivialise A_n pour τ^n et *a fortiori* pour τ. ∎

Théorème 1.23 *Soient (X,τ) un espace polonais, et $B \in \mathscr{B}(X,\tau)$. Alors, il existe une topologie τ^* sur X trivialisant B pour τ.*

Preuve : Soit Ω l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(X)$ tel qu'il existe une topologie trivialisant A dans τ. Le lemme précédent assure que Ω contient les fermés de (X,τ). Montrons que c'est une σ-algèbre sur X.

Soit $A \in \Omega$. Alors pour τ^* trivialisant A dans τ, τ^* trivialise aussi A^c dans τ donc Ω est stable par passage au complémentaire.

Soit par ailleurs $(A_n)_{n<\omega}$ une famille d'éléments de Ω. Considérons pour tout $n < \omega$ une topologie τ^n trivialisant A_n dans τ. Le lemme 1.22 permet de construire une topologie τ^* trivialisant chacun des A_n dans τ. $\bigcap_{n<\omega} A_n$ étant fermée dans τ^*, l'on obtient en appliquant le lemme 1.21 une topologie τ^{**} sur X trivialisant $\bigcap_{n<\omega} A_n$ pour τ^*, donc pour τ.

Par conséquent, $\Omega \supseteq \mathscr{B}(X,\tau)$. ∎

Proposition 1.24 *Soient X un espace polonais non vide et $B \in \mathscr{B}(X)$. Il existe une surjection continue $\mathcal{N} \longrightarrow B$.*

Preuve : Soient τ la topologie considérée sur X et τ^* donnée par le théorème 1.23 trivialisant B pour τ. D'après la proposition 1.5, B est polonais pour la topologie induite par τ^*, il existe donc par le théorème 1.12 une surjection continue $\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow (B,\tau^*)$, qui est aussi continue pour la topologie originelle τ. ∎

Proposition 1.25 *Soient X un espace polonais et $B \in \mathscr{B}(X)$. B est réunion d'un ensemble parfait et d'un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve : Soient τ la topologie de X et τ^* trivialisant B pour τ. D'après le théorème 1.16, il existe un ensemble parfait P (pour τ^*) et un ensemble dénombrable D tels que $B = P \cup D$. Un point isolé de X pour τ l'étant aussi pour τ^*, P est parfait dans (X,τ). ∎

Corollaire 1.26 *Tout borélien d'un espace polonais est au plus dénombrable ou a la puissance du continu.*

La proposition suivante permet, dans certains cas, de ramener l'étude de fonctions boréliennes à celle de fonctions continues.

Proposition 1.27 *Soient (X, τ) un espace polonais, (Y, υ) un espace topologique à base dénombrable, et $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \upsilon)$ une application borélienne. Il existe un raffinement τ^* de τ engendrant les mêmes boréliens et tel que $f : (X, \tau^*) \longrightarrow (Y, \upsilon)$ soit continue.*

Preuve : Soit $(U_n)_{n<\omega}$ une base d'ouverts de (Y, υ). Pour tout $n < \omega$ $f^{-1}(U_n) \in \mathscr{B}(X, \tau)$ donc il existe d'après le théorème 1.23 une topologie τ^n sur X trivialisant $f^{-1}(U_n)$ pour τ. Le lemme 1.22 assure donc l'existence de τ^* trivialisant chacun des $f^{-1}(U_n)$ pour τ et f est immédiatement continue pour cette nouvelle topologie. ∎

2 Ensembles analytiques

La proposition 1.24 montre que tout borélien B d'un espace polonais X est une image continue de l'espace de Baire. Si Y est un autre espace polonais et $f : X \longrightarrow Y$ est continue, alors $f(B)$ est aussi une image continue de $\mathcal{N}$. Une erreur historique de Lebesgue fut de croire qu'une telle image continue de borélien était toujours borélienne ; Souslin exhiba cependant un contre-exemple et étudia plus en détails ces projections de boréliens.

2.1 Définitions équivalentes et premières propriétés

Proposition 2.1 *Soient X un espace topologique séparé et $A \subseteq X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Soit A est vide, soit il existe une surjection continue de $\mathcal{N}$ sur A.

(ii) Il existe $F \subseteq \mathcal{N} \times X$ fermé (pour la topologie produit) tel que $A = \pi_X(F)$.

(iii) Il existe un espace polonais Y et un borélien $B \in \mathscr{B}(X \times Y)$ tel que $A = \pi_X(B)$.

(iv) Il existe un espace polonais Y, un borélien $B \in \mathscr{B}(Y)$ et une application continue $f : Y \longrightarrow X$ tels que $A = f(B)$.

Preuve : Supposons (i). Si A est vide, alors $F = \varnothing$ convient. Sinon, soit $f : \mathcal{N} \longrightarrow A$ surjective et continue. Pour $F \subseteq \mathcal{N} \times X$ le graphe de f, F est fermé et $\pi_X(F) = A$, d'où (ii).

$(ii) \implies (iii)$ et $(iii) \implies (iv)$ sont immédiates.

Supposons enfin (iv). Si A est non vide, alors B est non vide, donc par 1.24, il existe $g : \mathcal{N} \longrightarrow B$ surjective continue ; $f \circ g : \mathcal{N} \longrightarrow A$ est donc surjective et continue, d'où (i). ∎

Définition 2.2 *Un espace topologique séparé X est dit* analytique *s'il vérifie les assertions précédentes. Un complémentaire d'ensemble analytique dans un espace polonais est dit* coanalytique*.*

Si X est un espace polonais, l'on note $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ l'ensemble des parties analytiques de X, $\mathbf{\Pi}^1_1(X)$ l'ensemble de ses parties coanalytiques et $\mathbf{\Delta}^1_1(X) := \mathbf{\Sigma}^1_1(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_1(X)$.

S'il n'y a pas de confusions possibles sur l'espace de travail, on pourra simplement noter $\mathbf{\Sigma^1_1}$, $\mathbf{\Pi^1_1}$ et $\mathbf{\Delta^1_1}$.

La définition (i) sera la plus utile pour la preuve de la dichotomie $\mathcal{G}_0$. Les (ii) et (iii) serviront essentiellement pour la preuve des propriétés de stabilité de $\mathbf{\Sigma^1_1}$ et $\mathbf{\Pi^1_1}$. La définition (iv) enfin, est l'une des plus fréquentes dans la littérature, mais elle nous sera peu utile ici.

Bien que nous ne le prouvions pas dans ce mémoire, il existe des ensembles analytiques et coanalytiques non boréliens. Ceux-ci peuvent notamment être construits grâce à des arguments diagonaux. Citons par ailleurs deux exemples plus « naturels » :

— L'espace $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ est polonais pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace constitué des fonctions dérivables sur $[0,1]$ est coanalytique mais non borélien (Mazurkiewicz, démontré dans [2], théorème 33.9).

— Pour $\mathcal{K}([0,1])$ l'ensemble des parties compactes de $[0,1]$ muni de la distance de Hausdorff, $\mathcal{K}([0,1])$ est polonais et le sous-espace des compacts non dénombrables est analytique mais non borélien (Hurewicz, démontré dans [2], théorème 27.5).

Étudions les propriétés de stabilité de $\mathbf{\Sigma^1_1}$ et de $\mathbf{\Pi^1_1}$.

Proposition 2.3 *Soit X un espace polonais. $\mathbf{\Sigma^1_1}(X)$ et $\mathbf{\Pi^1_1}(X)$ sont clos par unions et intersections dénombrables.*

Preuve : Il suffit, quitte à passer au complémentaire, de montrer la stabilité de $\mathbf{\Sigma^1_1}(X)$.

Soient $(A_n)_{n<\omega}$ des ensembles analytiques, $(B_n)_{n<\omega}$ des boréliens de $\mathcal{N} \times X$ tels que $\forall n < \omega$, $A_n = \pi_X(B_n)$, donnés par la définition (iii) des analytiques. Alors $\bigcup_{n<\omega} A_n = \pi_x\left(\bigcup_{n<\omega} B_n\right)$ et $\bigcup_{n<\omega} B_n$ est un borélien de $\mathcal{N} \times X$, donc $\bigcup_{n<\omega} A_n$ est est analytique (définition (iii)). L'on démontre de même la stabilité par intersection dénombrable. ∎

Proposition 2.4 *Soient X un espace polonais, Y un espace topologique à base dénombrable et $A \subseteq X$ une partie analytique. Si $f : X \longrightarrow Y$ est borélienne, alors $f(A)$ est analytique.*

Preuve : Notons τ la topologie de X. D'après la proposition 1.27, il existe une topologie polonaise τ^* sur X telle que $f : (X, \tau^*) \longrightarrow Y$ soit continue.

Par la proposition 1.12, il existe une surjection continue $\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow (X, \tau^*)$. Alors $f \circ \varphi : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ est continue et surjective, et Y est analytique par la définition (i). ∎

Montrons enfin la stabilité des classes $\mathbf{\Sigma^1_1}$ et $\mathbf{\Pi^1_1}$ par image borélienne réciproque.

Lemme 2.5 *Soient X un espace topologique, Y un espace de Fréchet*[2] *séparable et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction borélienne. Alors le graphe de f est un borélien de $X \times Y$.*

Preuve : Notons Γ ce graphe. Soit $(U_n)_{n<\omega}$ une base dénombrable de la topologie de Y.

2. C'est-à-dire, dont les singletons sont fermés.

Soient $(x, y) \in X \times Y$. Si $y = f(x)$, alors $\forall n < \omega$, $y \in U_n \implies x \in f^{-1}(U_n)$. Réciproquement, si $y \neq f(x)$, alors il existe un ouvert U_n contenant y mais pas $f(x)$, donc $x \notin f^{-1}(U_n)$. Par conséquent, on a l'égalité :

$$\Gamma = \bigcap_{n<\omega} \big(\{(x,y) : y \notin U_n\} \ \cup \ \{(x,y) : x \in f^{-1}(U_n)\}\big)$$

Et Γ est borélien. ∎

Proposition 2.6 *Soient X et Y des espaces polonais, et $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^1_1(X)$). Si $f : Y \longrightarrow X$ est borélienne, alors $f^{-1}(A)$ est analytique (resp. coanalytique) dans Y.*

Preuve : Si A est analytique, alors $f^{-1}(A) = \{x \in X : \exists y \in A, (x, y) \in \Gamma\}$ où Γ est le graphe de f. Or, par la définition (ii), il existe $F \subseteq \mathcal{N} \times Y$ fermé tel que $A = \pi_Y(F)$. Soit $B := \{(x, y, z) \in X \times Y \times \mathcal{N} : (z, y) \in F \wedge (x, y) \in \Gamma\}$. Le lemme 2.5 notamment assure que B est une partie borélienne de $\mathcal{N} \times X \times Y$. De plus,

$$\begin{aligned}
\pi_X(B) &= \{x \in X : \exists (y,z) \in Y \times \mathcal{N}, (x,y,z) \in B\} \\
\pi_X(B) &= \{x \in X : \exists (y,z) \in Y \times \mathcal{N}, (x,y) \in \Gamma \wedge (z,y) \in F\} \\
\pi_X(B) &= \{x \in X : \exists y \in A, y = f(x)\} \\
\pi_X(B) &= f^{-1}(A)
\end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(A)$ est analytique (définition (iii)).
Si A est coanalytique, alors $f^{-1}(A) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash A)$ est donc coanalytique. ∎

2.2 Théorème de séparation

Le théorème suivant permet de comprendre plus précisément les relations entre ensembles analytiques et ensembles boréliens.

Théorème 2.7 (Lusin) *Soient X un espace polonais et $A, B \subseteq X$ des ensembles analytiques disjoints. Alors, il existe un ensemble borélien $C \subseteq X$ séparant A et B, c'est-à-dire tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \varnothing$.*

Preuve : Soient $f, g : \mathcal{N} \longrightarrow X$ des continues d'image respective A et B. Pour $\sigma \in \mathcal{N}^*$, posons $A_\sigma := f(\mathcal{N}_\sigma)$ et $B_\sigma = g(\mathcal{N}_\sigma)$.

Soit $\sigma \in \mathcal{N}^*$. Supposons que pour tous $i, j < \omega$, il existe un borélien $C_{i,j}$ contenant $A_{\sigma^\frown i}$ et dont l'intersection avec $B_{\sigma^\frown j}$ est vide. Alors, $C := \bigcup_{i<\omega} \bigcap_{j<\omega} C_{i,j}$ est un borélien séparant $A_\sigma = \bigcup_{i<\omega} A_{\sigma^\frown i}$ et $B_\sigma = \bigcup_{i<\omega} B_{\sigma^\frown i}$.

Supposons alors que A et B ne puissent pas être séparés par un borélien. En itérant ce résultat, l'on définit deux familles $(\sigma^n)_{n<\omega}$ et $(\tau^n)_{n<\omega}$ telles que pour tout $n < \omega$:

(i) $|\sigma^n| = |\tau^n| = n$;

(ii) $\sigma^n \subseteq \sigma^{n+1}$ et $\tau^n \subseteq \tau^{n+1}$;

(iii) Il n'existe pas de borélien $C \in \mathscr{B}(X)$ tel que $C \cap A_{\sigma^n} = \varnothing$ et $B_{\sigma^n} \subseteq C$.

Posons $x := \bigcup_{n<\omega} \sigma_i$ et $y := \bigcup_{n<\omega} \tau_i$. L'on sait que $f(x) \in A$ et $g(y) \in B$. Soient U et V des ouverts disjoints contenant respectivement $f(x)$ et $g(y)$. Par continuité de f et g, et puisque pour tout $z \in \mathcal{N}$, $(\mathcal{N}_{z\restriction n})_{n<\omega}$ forme une base de voisinages de z, il existe $n < \omega$ tel que $f(\mathcal{N}_{x\restriction n}) \subseteq U$ et $g(\mathcal{N}_{y\restriction n}) \subseteq V$. Or $x\restriction n = \sigma^n$ et $y\restriction n = \tau^n$, donc $A_{\sigma^n} = f(\mathcal{N}_{x\restriction n})$ et $B_{\tau^n} = g(\mathcal{N}_{y\restriction n})$ sont séparés par l'ouvert U, ce qui est contradictoire. ■

Corollaire 2.8 *Soit X un espace polonais. $\mathbf{\Delta^1_1}(X) = \mathscr{B}(X)$.*

Preuve : Nous avons déjà vu (théorème 1.24)) que $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathbf{\Sigma^1_1}(X)$. $\mathscr{B}(X)$ étant stable par passage au complémentaire, $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathbf{\Delta^1_1}(X)$.

Réciproquement, si $A \in \mathbf{\Delta^1_1}$, alors A et A^c sont analytiques et disjoints. Par le théorème 2.7, il existe $B \in \mathscr{B}(X)$ tel que $A \subseteq B \subseteq (A^c)^c = A$, ce qui conclut. ■

La proposition suivante nous permettra d'affiner certains résultats pour travailler avec des ensembles boréliens plutôt que des analytiques, et sera utile dans la preuve de la dichotomie $\mathcal{G}_0$.

Proposition 2.9 *Soient X un espace polonais et R une partie analytique de X^2. Si $A \subseteq X$ est un ensemble analytique tel que $A^2 \cap R = \varnothing$, alors il existe $B \supseteq A$ borélien tel que $B^2 \cap R = \varnothing$.*

En d'autres termes, une partie analytique dont deux éléments ne sont pas en relation par R est contenue dans une partie borélienne ayant la même propriété, dès que R est analytique.

Preuve : Notons π_0 et π_1 les projections du produit X^2 sur X.

Soit $A_0 := \{x_0 \in X : \exists x_1 \in A,\ x_0 \underset{R}{\sim} x_1\}$. $A_0 = \pi_0(R \cap (X \times A))$, donc A_0 est analytique d'après les propriétés de stabilité précédentes. $A \cap A_0 = \varnothing$, donc d'après le théorème de Lusin (2.7), il existe $B_0 \in \mathscr{B}(X)$ tel que $A \subseteq B_0 \subseteq X \backslash A_0$.

Posons alors $A_1 := \{x_1 \in X : \exists x_0 \in B_0,\ x_0 \underset{R}{\sim} x_1\}$. De même, $A_1 = \pi_1(R \cap (B_0 \times X))$ est analytique. Or, si $x_1 \in A_1$, alors $\exists x_0 \in B_0$, $x_0 \underset{R}{\sim} x_1$; et $x_0 \notin A_0$ donc $\forall y_1 \in A$, $x_0 \underset{R}{\not\sim} y_1$ d'où $x_1 \notin A$. D'après le théorème de Lusin, il existe B_1 borélien de X tel que $A \subseteq B_1 \subseteq X \backslash A_1$. Si $x_0 \in B_0$ et $x_1 \in B_1$, alors $x_1 \notin A_1$ d'où $(x_0, x_1) \notin R$.

Par conséquent $B := B_0 \cap B_1$ est borélien, contient A, et vérifie $B^2 \cap R = \varnothing$. ■

Ce résultat peut se généraliser dans le cas où l'espace X n'est pas polonais ; toutefois les boréliens n'étant *a priori* pas analytiques si l'espace n'est pas supposé polonais, il n'est pas immédiat que A_1 est analytique.

3 Mesures topologiques

La théorie de la mesure de Borel et Lebesgue permet d'attribuer à certains sous-ensembles d'un espace mesurable une taille réelle positive, et donc de définir des ensembles négligeables. Il suffit, pour prouver qu'un ensemble est non vide, de s'assurer que son complémentaire est négligeable.

Dans cette section, nous étudions une autre notion de mesurabilité, définie par Baire, qui permet d'obtenir des équivalents purement topologiques aux résultats de théorie de la mesure. À défaut de pouvoir attribuer une mesure exacte aux ensembles Baire-mesurables, nous serons en mesure de définir lesquels de ces ensembles sont négligeables au sens de Baire. Nous disposerons de propriétés très similaires à celles des ensembles mesurables au sens de Borel.

3.1 Maigreur et comaigreur

Définition 3.1 *Soit X un espace topologique. Un ensemble $M \subseteq X$ est dit* maigre *dans X s'il existe une suite $(F_n)_{n<\omega}$ de fermés d'intérieur vide de X tels que $M \subseteq \bigcup_{n<\omega} F_n$.*

Un ensemble de complémentaire maigre dans X est dit comaigre *ou* générique *dans X.*

$\mathscr{M}(X)$ désigne l'ensemble des parties maigres de X.

Par exemple, $\mathbf{Q}$ est maigre *et* dense dans $\mathbf{R}$, puisque ses singletons sont fermés d'intérieur vide. Par ailleurs, si U est un ouvert de X espace topologique quelconque, alors ∂U est fermé d'intérieur vide, donc maigre.

Un ensemble est comaigre si et seulement s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Si $M, Y \subseteq X$ et $M \cap Y$ est maigre (resp. comaigre) dans Y muni de la topologie induite, alors on dira simplement que M est maigre (resp. comaigre) dans Y. On s'autorisera tout simplement à parler d'ensemble maigre (sans précision) pour désigner un ensemble maigre dans X, à condition que l'espace de travail ne laisse pas de doute. Cette notion n'est pas ambiguë dans le cas où Y est ouvert :

Proposition 3.2 *Soient X un espace topologique, $M \subseteq X$ et $U \subseteq X$ un ouvert. Si M est maigre dans X, alors $M \cap U$ est maigre dans U.*

Preuve : Un ensemble $V \subseteq U$ est ouvert dans U muni de la topologie induite si et seulement s'il est ouvert dans X. Par conséquent, pour $Y \subseteq X$, $Y \cap U$ est d'intérieur vide dans X si et seulement s'il est d'intérieur vide dans U, ce qui permet de conclure. ∎

Proposition 3.3 *Soient X un espace topologique et $Y \subseteq X$. Alors $\mathscr{M}(Y)$ est un σ-idéal de X, c'est-à-dire que :*

1. *Si M est maigre dans Y et $N \subseteq M$, alors N est maigre dans Y.*
2. *Si $(M_n)_{n<\omega}$ est une famille dénombrable d'ensembles maigres dans Y, alors $\bigcup_{n<\omega} M_n$ est maigre dans Y.*

Les ensembles comaigres ont bien entendu les propriétés duales.

Ces propriétés sont similaires à celles des ensembles négligeables dans la théorie de la mesure de Borel : un ensemble maigre doit être vu comme un ensemble *infinitésimal* dans un sens topologique. Toutefois, la maigreur est *a priori* indépendante de la négligeabilité au sens de Lebesgue. Soit par exemple $(q_n)_{n<\omega}$ une énumération de $\mathbf{Q}$. Posons pour tout ε, $\mathcal{Q}_\varepsilon := \bigcup_{n<\omega} \left]q_n - 2^{-n-2}\varepsilon, q_n + 2^{-n-2}\varepsilon\right[$. $\mathcal{Q}_\varepsilon$ est ouvert, dense dans $\mathbf{R}$ (puisqu'il contient $\mathbf{Q}$) et de mesure de Lebesgue majorée par ε. Ainsi, $\mathcal{Q} := \bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*} \mathcal{Q}_\varepsilon = \bigcap_{m<\omega} \mathcal{Q}_{2^{-m}}$ est un borélien de $\mathbf{R}$, Lebesgue-négligeable mais comaigre dans $\mathbf{R}$.

La définition suivante introduit des espaces dans lesquels les notions de maigreur et comaigreur sont tout particulièrement intéressantes.

Définition 3.4 *Un espace topologique X a une* topologie de Baire *si tout ensemble maigre de X est d'intérieur vide, c'est-à-dire si tout ensemble comaigre est dense dans X.*

Signalons que l'appellation « topologie de Baire » n'est pas standard, la dénomination classique étant « espace de Baire ». Toutefois, nous préférons ici employer ce terme afin d'éviter toute confusion avec *l'*espace de Baire (unique) $\mathcal{N}$, dont le nom est tout aussi standard.

Les notions de maigreur et comaigreur ont relativement peu d'intérêt en-dehors des espaces topologiques de Baire, puisqu'un ensemble d'intérieur non vide ne saurait être considéré comme « infinitésimal ». Rappelons *le théorème de catégorie de Baire*, vu en cours de licence :

Théorème 3.5 *Toute topologie complètement métrisable est de Baire.*

Les deux résultats suivants nous permettent d'assurer dans certains cas qu'un ensemble ne peut être maigre et comaigre simultanément.

Proposition 3.6 *Soit X un espace topologique de Baire. Si $U \subseteq X$ est ouvert, alors la topologie induite sur U est de Baire.*

Preuve : Par la proposition 3.2 ; un ensemble maigre dans U est maigre dans X, donc d'intérieur vide dans X, donc d'intérieur vide dans U. ∎

Proposition 3.7 *Soit X un espace topologique de Baire et $M \subseteq X$. Si M est maigre* et *comaigre dans X, alors X est vide.*

Preuve : $X = M \cup (X \backslash M)$ est maigre, donc d'intérieur vide. Mais X est ouvert, donc est vide. ∎

Tout comme dans la théorie de mesure, il est possible de définir une quantification « Baire-presque-partout ».

Définition 3.8 *Soit X un espace topologique et $P(x)$ un prédicat booléen portant sur les éléments de X. On note $\forall^* x \in X, P(x)$ la propriété « $\{x \in X : P(x)\}$ est comaigre dans X ». Dualement, si $\{x \in X : P(x)\}$ n'est pas maigre dans X, alors on note $\exists^* x \in X, P(x)$.*

Proposition 3.9 *Soient X un espace topologique, $U \subseteq X$ un ouvert et $P(x)$ un prédicat booléen portant sur les éléments de X.*

1. $[\forall^* x \in X,\ \neg P(x)] \iff [\neg \exists^* x \in X,\ P(x)]$.
2. $[\exists^* x \in U,\ P(x)] \implies [\exists^* x \in X,\ P(x)]$.
3. $[\forall^* x \in X,\ P(x)] \implies [\forall^* x \in U,\ P(x)]$.
4. *Si de plus X a une topologie de Baire et est non vide, alors* $[\forall^* x \in X, P(x)] \implies [\exists^* x \in X, P(x)]$.

Preuve :
1. Immédiat.
2. Corollaire de la proposition 3.2.
3. Résultat dual du précédent.
4. Corollaire de la proposition 3.7. ∎

3.2 Propriété de Baire

Définition 3.10 *Soit X un espace topologique. Un ensemble $B \subseteq X$ est réputé avoir la* propriété de Baire *ou être* Baire-mesurable *s'il existe un ouvert $U \subseteq X$ et un ensemble maigre $M \subseteq X$ tels que $B = U \,\Delta\, M$, où Δ représente la différence symétrique. On notera $\mathbf{BM}(X)$ l'ensemble des parties Baire-mesurables de X.*

Autrement dit B est Baire-mesurable si et seulement s'il existe un ouvert U tel que $B \,\Delta\, U$ soit maigre.

Un ensemble est Baire-mesurable s'il est ouvert *à un ensemble maigre près*, les ouverts étant les ensembles les plus simples à étudier en topologie. L'intérêt essentiel de cette notion dans notre étude vient de la proposition suivante :

Proposition 3.11 (localisation) *Soit X un espace topologique et $B \subseteq X$ ayant la propriété de Baire. Si B n'est pas maigre, alors il existe un ouvert $U \subseteq X$ non vide tel que B soit comaigre dans U.*

Preuve : Il suffit d'écrire $B = U \,\Delta\, M$. B étant non maigre, U est non vide. Par 3.2, M est maigre dans U, donc $B \supseteq U \backslash M$ est comaigre dans U. ∎

Proposition 3.12 *Soit X un espace topologique. $\mathbf{BM}(X)$ est une σ-algèbre sur X.*

Preuve : $\mathbf{BM}(X)$ contient immédiatement $\varnothing$ et X.

Soit $(B_n)_{n<\omega} \in \mathbf{BM}(X)^\omega$ et pour tout $n < \omega$, U_n un ouvert de X tel que $B_n \,\Delta\, U_n$ soit maigre dans X. Alors

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n<\omega} B_n \;\Delta\; \bigcup_{n<\omega} U_n &= \bigcup_{n<\omega} B_n \backslash \bigcup_{n<\omega} U_n \;\cup\; \bigcup_{n<\omega} U_n \backslash \bigcup_{n<\omega} B_n \\
\bigcup_{n<\omega} B_n \;\Delta\; \bigcup_{n<\omega} U_n &\subseteq \bigcup_{n<\omega} (B_n \backslash U_n) \;\cup\; \bigcup_{n<\omega} (U_n \backslash B_n) \\
\bigcup_{n<\omega} B_n \;\Delta\; \bigcup_{n<\omega} U_n &\subseteq \bigcup_{n<\omega} (U_n \Delta B_n)
\end{aligned}$$

Or, $\bigcup_{n<\omega}(U_n \Delta B_n)$ est maigre, donc $\left(\bigcup_{n<\omega} B_n\right) \in \mathbf{BM}(X)$.

Par ailleurs, si $B \in \mathbf{BM}(X)$ et U est un ouvert tel que $B \Delta U$ soit maigre, alors $\left(\overline{U}\right)^c$ est ouvert, et

$$\begin{aligned}
B^c \,\Delta\, \left(\overline{U}\right)^c &= B \,\Delta\, \overline{U} = (B \backslash (U \cup \partial U)) \cup ((U \cup \partial U) \backslash B) \\
B^c \,\Delta\, \left(\overline{U}\right)^c &\subseteq (B \backslash U) \cup (U \backslash B) \cup \partial U = (B \Delta U) \cup \partial U
\end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que ∂U fermé d'intérieur vide, était un ensemble maigre ; donc $B^c \Delta \left(\overline{U}\right)^c$ est maigre et B^c a la propriété de Baire. ∎

Corollaire 3.13 *Les boréliens ont la propriété de Baire.*

Preuve : Immédiat sachant que $\mathbf{BM}(X)$ est une σ-algèbre sur X et contient les ouverts. ∎

En réalité, presque tous les ensembles rencontrés ici ont la propriété de Baire : un théorème de Shelah et Solovay (démontré dans [8]) assure si ZF est cohérente que la théorie constituée de ZF et de l'axiome « tout sous-ensemble de $\mathbf{R}$ est Baire-mesurable » est cohérente. Aussi, il est nécessaire d'avoir recours à l'axiome du choix pour construire des ensembles *dont on peut prouver dans ZFC qu'ils n'ont pas la propriété de Baire*. Par exemple un ensemble de Vitali (sous-ensemble de $[0,1]$ contenant exactement un représentant de chaque classe de $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$) n'a pas la propriété de Baire (démontré dans [1], corollaire 7.19). Nous allons maintenant démontrer que les analytiques sont Baire-mesurables.

3.3 Mesurabilité des analytiques

Dans ce but, nous commençons par définir une opération sur les parties d'un ensemble liée à la façon dont nous avons introduit les ensembles analytiques. Nous montrerons qu'elle permet d'écrire tout ensemble analytique à partir d'ensembles fermés et qu'elle préserve la propriété de Baire pour conclure.

Définition 3.14 *Soient X un espace polonais, et $\mathfrak{B} = (B_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ une famille de parties de X. L'on pose*

$$\mathcal{A}(\mathfrak{B}) := \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n<\omega} B_{x\restriction n}$$

$\mathcal{A}$ est appelée opération de Souslin – Alexandrov.

Proposition 3.15 *Soit X un espace polonais. Si $A \subseteq X$ est analytique, alors il existe une famille $\mathfrak{F} = (F_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ de fermés de X tels que $A = \mathcal{A}(\mathfrak{F})$.*

La réciproque de ce résultat est vraie, mais ne présentera pas pour nous d'intérêt par la suite.

Preuve : Si A est vide, alors $F_\sigma := \varnothing$ pour tout $\sigma \in \mathcal{N}^*$ convient. Sinon, soit $f : \mathcal{N} \longrightarrow A$ surjective et continue. Posons $F_\sigma := \overline{f(\mathcal{N}_\sigma)}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{N}^*$.

Immédiatement, $\mathfrak{F} := (F_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ est un arbre décroissant, et pour tout $x \in \mathcal{N}$, $f(x) \in \bigcap_{n<\omega} F_{x\restriction n}$. Fixons une métrique complète induisant la topologie de X et un $\varepsilon > 0$; f étant continue et $(\mathcal{N}_{x\restriction n})_{n<\omega}$ formant une base de voisinages de x, il existe $n < \omega$ tel que $f(\mathcal{N}_{x\restriction n}) \subseteq B(x,\varepsilon)$ d'où $F_{x\restriction n} \subseteq B_d(x, 2\varepsilon)$. Par conséquent, $\operatorname{diam}\left(F_{x\restriction n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $\bigcap_{n<\omega} F_{x\restriction n} = \{f(x)\}$.

Ainsi, $A = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \{f(x)\} = \mathcal{A}(\mathfrak{F})$. ∎

Sachant que les fermés sont Baire-mesurables, il nous suffira de prouver que la propriété de Baire est stable par opération de Souslin. Le lemme technique suivant assure que dans un espace topologique de Baire à base dénombrable, toute partie peut être incluse dans un plus petit (à partie maigre près) ensemble Baire-mesurable.

Lemme 3.16 *Soit X un espace ayant une topologie de Baire à base dénombrable. Pour tout $A \subseteq X$, il existe $B \subseteq X$ ayant la propriété de Baire tel que $B \supseteq A$ et pour tout $B' \supseteq A$ ayant la propriété de Baire, $B \backslash B'$ soit maigre.*

Preuve : Si X, est vide, alors le résultat est immédiat. Sinon, soit $(U_n)_{n<\omega}$ une base d'ouverts de X. Posons A' l'ensemble des points donc tout voisinage intersecte A en une partie non-maigre, soit

$$A' := \{x \in X : \forall n < \omega,\ x \in U_n \implies U_n \cap A \text{ est non maigre dans } X\}$$

A' est fermé. En effet, si $x \notin A'$, alors il existe un voisinage de base U_n contenant x tel que $U_n \cap A$ soit maigre ; et $U_n \cap A' = \varnothing$.

Or,

$$A\backslash A' = A \;\cap\; \{x \in X : \exists n < \omega,\; [x \in U_n \;\wedge\; U_n \cap A \in \mathcal{M}(X)]\}$$
$$A\backslash A' = \bigcup_{\substack{n<\omega \\ A\cap U_n \in \mathcal{M}(X)}} (A \cap U_n)$$

donc $A\backslash A'$ est maigre par la propriété 3.3. Il suit que $B := A \cup A' = A' \cup (A\backslash A')$ a la propriété de Baire.

Par ailleurs, si $B' \supseteq A$ a la propriété de Baire, alors il en est de même pour $C := B\backslash B'$. Si C était non maigre, alors par la proposition 3.11, il existerait un ouvert U non vide tel que $C\Delta U$ soit maigre donc $U\backslash C$ maigre d'où pour $n < \omega$ tel que $U_n \subseteq U$, $U_n\backslash C$ serait maigre. Mais $C \subseteq B\backslash A$ d'où $U_n\backslash C \supseteq U_n\backslash(B\backslash A) \supseteq U_n \cap A$, donc $U_n \cap A$ serait maigre. Par ailleurs, $U_n \cap C \neq \varnothing$, et $C = B\backslash B' \subseteq (A \cup A')\backslash A \subseteq A'$; $A' \cap U_n$ serait non vide, et donc $U_n \cap A$ serait non maigre par définition de A', contredisant la proposition 3.7. ■

Théorème 3.17 *Soit X un espace ayant une topologie de Baire à base dénombrable. $\mathbf{BM}(X)$ est stable par opération de Souslin $\mathcal{A}$.*

Preuve : Soit $\mathfrak{A} = (A_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ une famille de parties de X ayant la propriété de Baire. Pour $A'_\sigma := \bigcap_{n<|\sigma|} A_{\sigma\restriction n}$, les A'_σ ont la propriété de Baire et $\mathcal{A}(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}((A'_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*})$; nous pouvons donc supposer que $\mathfrak{A}$ est un arbre décroissant. Posons pour $\sigma \in \mathcal{N}^*$,

$$A^\sigma := \bigcup_{x\in\mathcal{N}_\sigma} \bigcap_{n<\omega} A_{x\restriction n}$$

Immédiatement, $A^\sigma \subseteq A_\sigma$ et $(A^\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ est un arbre décroissant.

Soit alors $\tilde{B}^\sigma$ donné par le lemme 3.16 appliqué à l'ensemble A^σ. A_σ est Baire-mesurable et contient A^σ ; de même pour les $\tilde{B}^{\sigma\restriction n}$ pour $n \leqslant |\sigma|$. Aussi, pour

$$B^\sigma := A_\sigma \;\cap\; \bigcap_{n<|\sigma|} \left(\tilde{B}^{\sigma\restriction n}\right)$$

les B^σ vérifient les propriétés données par le lemme 3.16, c'est-à-dire que $B^\sigma \in \mathbf{BM}(X)$ et $[B' \supseteq A^\sigma \wedge B' \in \mathbf{BM}(X)] \implies B^\sigma\backslash B' \in \mathscr{M}(X)$. De plus, $(B^\sigma)_{\sigma\in\mathcal{N}^*}$ est un arbre décroissant.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{N}^*$, $A^\sigma \subseteq \bigcup_{m<\omega} A^{\sigma^\frown m} \subseteq \bigcup_{m<\omega} B^{\sigma^\frown m}$; par conséquent

$$C_\sigma := B^\sigma \;\backslash\; \bigcup_{m<\omega} B^{\sigma^\frown m}$$

est maigre ; il en est de même pour $C := \bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}^*} C_\sigma$.

Soit $b \in B^\varnothing\backslash C$. Construisons par récurrence $x \in \mathcal{N}$ tel que $b \in \bigcap_{n<\omega} B^{x\restriction n}$: $x\restriction 0 := \varnothing$ et si $x\restriction n$ est construite, alors puisque $b \in B^{x\restriction n}$ et $b \notin C_{x\restriction n}$, $b \in \bigcup_{m<\omega} B^{(x\restriction n^\frown m)}$; l'on choisit donc $x_n < \omega$ tel que $b \in B^{x\restriction n^\frown x_n}$. Ainsi, puisque pour tout $n < \omega$, $B^{x\restriction n} \subseteq A_{x\restriction n}$, $b \in \bigcap_{n<\omega} A_{x\restriction n} \subseteq \mathcal{A}(\mathfrak{A})$.

Par conséquent, $B^\varnothing\backslash C \subseteq \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ donc $B^\varnothing\backslash\mathcal{A}(\mathfrak{A}) \subseteq C$ et $B^\varnothing\backslash\mathcal{A}(\mathfrak{A})$ est maigre. Si $x \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$, alors $x \in A^\varnothing \subseteq B^\varnothing$, donc $\mathcal{A}(\mathfrak{A}) \in \mathbf{BM}(X)$. ■

Corollaire 3.18 *Soit X un espace polonais ; si $A \subseteq X$ analytique ou coanalytique alors A est Baire-mesurable.*

Preuve : Si A est analytique, alors la proposition 3.15 assure l'existence d'une famille de fermés $\mathfrak{F}$ tel que $A = \mathcal{A}(\mathfrak{F})$. Les fermés ayant la propriété de Baire, le théorème assure qu'il en est de même pour A.

Si A est coanalytique, l'on conclut par stabilité de $\mathbf{BM}(X)$ par passage au complémentaire. ∎

3.4 Propriété de Baire sur un produit

Définition 3.19 *Soient X et Y des espaces topologiques ; si $A \subseteq X \times Y$, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, on définit les* sections verticale *selon x_0 et* horizontale *selon y_0 comme respectivement :*

$$A_{x_0} := \{y \in Y : (x_0, y) \in A\}$$

$$A^{y_0} := \{x \in X : (x, y_0) \in A\}$$

Par exemple, si E est une relation d'équivalence sur X, alors pour $x \in X$, $E_x = E^x$ est la classe de x pour E. Si P est une relation d'ordre sur X, et $x \in X$, alors P_x est l'ensemble des majorants de x et P^x l'ensemble de ses minorants.

Notons que A_{x_0} (resp. A^{y_0}) est l'image réciproque de A par l'application $y \longmapsto (x_0, y)$ (resp. $x \longmapsto (x, y_0)$), continue : l'opération de section verticale selon x_0 (resp. horizontale selon y_0) compatible avec les opérations d'inclusion, de passage au complémentaire, d'intersection et de réunion, et toute section d'un ensemble ouvert (resp. fermé, borélien, analytique, coanalytique) est ouverte (resp. fermée, borélienne, analytique, coanalytique).

Théorème 3.20 (Kuratowski – Ulam) *Soient X et Y deux espaces topologiques de Baire à base d'ouverts dénombrable, et $A \subseteq X \times Y$ un ensemble Baire-mesurable. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est comaigre dans $X \times Y$.*

(ii) *$\forall^* x \in X$, A_x est comaigre dans Y.*

(iii) *$\forall^* y \in Y$, A^y est comaigre dans X.*

Preuve : Le résultat est immédiat si X ou Y est vide, supposons donc qu'aucun des deux ne l'est.

X et Y jouant ici des rôles symétrique, il suffit de prouver l'équivalence entre (i) et (ii).

Supposons (i) et donnons-nous une base dénombrable d'ouverts non vides $(U_n)_{n<\omega}$ de la topologie de Y. A étant comaigre dans $X \times Y$, il existe une famille $(D_n)_{n<\omega}$ d'ouverts denses dans $X \times Y$ tels que $\bigcap_{n<\omega} D_n \subseteq A$. Pour tous $m, n < \omega$, $D_n \cap (X \times U_m)$ est un ouvert dense de $X \times U_m$; donc $\pi_X(D_n \cap (X \times U_m))$ est un ouvert dense dans X. Par conséquent,

$$G := \bigcap_{m,n<\omega} \pi_X(D_n \cap (X \times U_m))$$

est comaigre dans X.

Or, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
x \in G &\implies \forall m, n < \omega,\ \exists y \in Y,\ (x, y) \in D_n \cap (X \times U_m) \\
&\implies \forall m, n < \omega,\ (D_n)_x \cap U_m \neq \varnothing \\
&\implies \forall n < \omega,\ (D_n)_x \text{ est dense dans } Y \\
x \in G &\implies A_x \supseteq \left(\bigcap_{n<\omega} D_n \right)_x \quad \text{est comaigre dans } Y
\end{aligned}$$

D'où (ii).

Réciproquement, supposons $\neg(i)$. A^c a la propriété de Baire et est non-maigre : par la proposition 3.11, il existe un ouvert non vide, que l'on peut supposer de la forme $U \times V$, dans lequel A^c est comaigre, c'est-à-dire que $(U \times V) \cap A^c$ est comaigre dans $U \times V$ par 3.2. Or, d'après $(i) \implies (ii)$ appliqué à $A^c \cap (U \times V)$, U et V, il vient que $\forall^* x \in U$, $(A^c)_x$ est comaigre dans V, c'est-à-dire que $\forall^* x \in U$, A_x est maigre dans V. Puisque V a une topologie de Baire (proposition 3.6), $\forall^* x \in U, \neg\, [A_x$ est comaigre dans $V]$ par la proposition 3.7, et *a fortiori* $\forall^* x \in U, \neg\, [A_x$ est comaigre dan

Mais alors U ayant aussi une topologie de Baire, par la proposition 3.9.4, $\exists^* x \in U, \neg\, [A_x$ est comaigre dans $Y]$. Par 3.9.2, $\exists^* x \in X, \neg\, [A_x$ est comaigre dans $Y]$ donc (proposition 3.9.1) $\neg \forall^* x \in X, [A_x$ est comaigre dans $Y]$ ou encore $\neg(ii)$. ■

3.5 Plongements de l'ensemble de Cantor

Nous démontrons dans cette section un théorème d'indépendance dû à Mycielski. Celui-ci assure, si nous disposons d'un ensemble parfait et d'une relation maigre R, qu'il est possible d'y plonger l'ensemble de Cantor de façon à ce que deux éléments de l'image ne soient jamais en relation, le seul obstacle étant la diagonale (dans le cas, par exemple, des relations réflexives).

Tout comme dans le théorème 1.15, nous construirons un tel plongement en réalisant un arbre d'ensembles de taille tendant vers zéro, de sorte que deux points pris dans deux ensembles distincts de même niveau de l'arbre soient en relation. Nous souhaitons, là encore, travailler avec des ensembles ouverts, mais la seule information concernant R est qu'il contient une intersection dénombrable d'ouverts dense. Le lemme suivant nous permet de construire, pour un tel arbre fini et en supposant $R = D$ ouvert dense, un étage de plus dans l'arborescence. Nous l'itérerons en choisissant à chaque étape un ouvert $D_{n+1} \subseteq D_n$ de sorte que $\bigcap_{n<\omega} D_n$ soit inclus dans R.

Lemme 3.21 *Soient X un espace métrique parfait et D un ouvert dense dans $X \times X$.*

1. *Si U_0 et U_1 sont deux ouverts non vides de X, alors il existe V_0 et V_1 ouverts non vides disjoints tels que $\overline{V_0} \subseteq U_0$, $\overline{V_1} \subseteq U_1$ et $V_0 \times V_1 \subseteq D$.*
2. *Si $(U_k)_{k \in K}$ est une famille finie d'ouverts non vides, alors il existe deux familles d'ouverts non vides de X, $(V_{k,0})_{k \in K}$ et $(V_{k,1})_{k \in K}$, vérifiant*
   - *(i)* $\forall k \in K$, $\overline{V_{k,0}} \subseteq U_k$ *et* $\overline{V_{k,1}} \subseteq U_k$ *;*
   - *(ii)* $\forall k \in K$, $V_{k,0} \cap V_{k,1} = \varnothing$ *;*
   - *(iii)* $\forall (k, i), (k', i') \in I \times 2,\ (k, i) \neq (k', i') \Longrightarrow V_{k,i} \times V_{k',i'} \subseteq D$

Preuve : 1. $U_0 \times U_1 \cap D$ est un ouvert non vide, donc contient un ouvert de base non vide $W_0 \times W_1$. X étant parfait, W_0 et W_1 ne sont pas réduits à un point ; il existe donc $w_0 \in W_0$ et $w_1 \in W_1$ distincts. X étant métrique donc de Hausdorff, ils possèdent des voisinages ouverts disjoints W_0' et W_1'. Pour $i < 2$, $W_i \cap W_i'$ est ouvert, donc contient un $B(w_i, 2\varepsilon_i)$. Pour $V_i := B(w_i, \varepsilon_i)$ $\overline{V_i} \subseteq B(w_i, 2\varepsilon_i) \subseteq U_i$. Le couple (V_0, V_1) a bien les propriétés désirées.

2. Pour tout $k \in K$, posons $W_{k,0}$ et $W_{k,1}$ les ensembles obtenus par le 1 appliqué à D et au couple (U_k, U_k). Donnons-nous une bijection

$$\varphi : n \longrightarrow \left\{(\sigma, \tau) \in (K \times 2)^2 : \sigma \neq \tau\right\}$$

et définissons les suites finies décroissantes $(W_\sigma^j)_{j<n+1}$ pour tout $\sigma \in K \times 2$ en posant :

(i) $\forall \sigma \in K \times 2$, $W_\sigma^0 := W_\sigma$;

(ii) Pour tout $j < n$, en notant $(\sigma, \tau) := \varphi(j)$, W_σ^{j+1} et W_τ^{j+1} sont les ouverts obtenus en appliquant le 1 à D et au couple (W_σ^j, W_τ^j) ; et $W_\rho^{j+1} := W_\rho^j$ si $\rho \notin \{\sigma, \tau\}$.

Pour $(k,i) \in K \times 2$, on pose alors $V_{k,i} := W_{(k,i)}^n$. La construction assure que $\overline{V_{k,i}} \subseteq U_k$; et que pour $\sigma, \tau \in K \times 2$ avec $\sigma \neq \tau$, $W_\sigma^{\varphi^{-1}(\sigma,\tau)}$ et $W_\tau^{\varphi^{-1}(\sigma,\tau)}$ soient disjoints et vérifient $W_\sigma^{\varphi^{-1}(\sigma,\tau)} \times W_\tau^{\varphi^{-1}(\sigma,\tau)} \subseteq D$; donc par décroissance des $\left(W_\sigma^j\right)_{j<n}$ il en est de même pour V_σ et V_τ. ∎

Théorème 3.22 (Mycielski) *Soient (X,d) un espace métrique parfait complet et R une partie maigre de X^2 ; il existe un plongement f de l'ensemble de Cantor dans X tel que $\forall x, y \in \mathcal{C}$, $x \neq y \Longrightarrow (f(x), f(y)) \notin R$.*

Preuve : Dans le lemme 3.21.2, il est toujours possible de choisir une sous-partie ouverte des ensembles $V_{k,i}$ sans altérer les conclusions ; nous pouvons par conséquent toujours les choisir de diamètre strictement inférieur à un réel positif donné.

Soit $(D_n)_{n<\omega}$ une suite d'ouverts denses dont l'intersection est contenue dans R^c. Quitte à considérer à la place $(\bigcap_{k=0}^n D_k)_{n<\omega}$, il est possible de supposer $(D_n)_{n<\omega}$ décroissante. Itérons le lemme 3.21.2 pour définir un arbre U indexé par $\mathcal{C}^*$ vérifiant :

(i) $U_\varnothing := X$;

(ii) $\forall 0 < n < \omega$, $\forall \sigma \in 2^n$, U_σ est un ouvert non vide de X de diamètre strictement inférieur à 2^{-n} ;

(iii) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $\forall i < 2$, $\overline{U_{\sigma^\frown i}} \subseteq U_\sigma$;

(iv) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $U_{\sigma^\frown 0} \cap U_{\sigma^\frown 1} = \varnothing$;

(v) $\forall 0 < n < \omega$, $\forall \sigma, \tau \in 2^n$, $\sigma \neq \tau \Longrightarrow U_\sigma \times U_\tau \subseteq D_n$.

Les condition (ii) et (iii), la complétude de (X,d) et le lemme 1.10 (fermés emboîtés) assurent que pour tout $x \in \mathcal{C}$, $\bigcap_{n<\omega} U_{x\restriction n}$ soit un singleton $\{f(x)\}$. Par (v), $(f(x), f(y)) \in R^c$ dès que $x \neq y$. f est par ailleurs injective grâce à la condition (iv). Enfin, pour $x \in \mathcal{C}$ et $B(f(x), 2^{-n})$ voisinage de base de $f(x)$,

$$y \in \mathcal{N}_{x\restriction n} \implies f(y) \in U_{x\restriction n} \implies f(y) \in B(f(x), 2^{-n})$$

donc f est continue. ∎

4 Dichotomie $\mathcal{G}_0$

Dans cette section, nous définissons la structure de graphe et ses homomorphismes, ainsi que l'opération de coloriage, intimement liée aux classes d'une relation d'équivalence. À chaque graphe peut être associé un nombre chromatique borélien, cardinal correspondant au nombre minimal de couleurs nécessaire pour le colorier avec des isochromes boréliennes. L'objectif est ici de construire un plus petit (dans un sens à définir) graphe noté $\mathcal{G}_0$ de nombre chromatique borélien non dénombrable.

4.1 Graphes et coloriages

Définition 4.1 *On appelle* graphe *sur X un couple $\mathcal{G} = (X, E)$ où E est une relation binaire symétrique et irréflexive sur X. Sa* restriction *$\mathcal{G}_{\restriction A}$ à $A \subseteq X$ est le graphe $(A, E \cap A^2)$. Un* sommet *est un élément de X, une* arête *est une paire de sommets en relation par E.*

Si X et Y sont des espaces topologiques, $\mathcal{G} = (X, R)$ un graphe sur X et $\mathcal{H} = (Y, S)$ un graphe sur Y, on appelle homomorphisme de graphes *une application borélienne de X dans Y telle que $\forall x_0, x_1 \in X$, $x_0 \underset{R}{\sim} x_1 \implies f(x_0) \underset{S}{\sim} f(x_1)$.*

On notera $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{H}$ (lire : « $\mathcal{G}$ se morphise dans *$\mathcal{H}$ ») s'il existe un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$.*

La relation $\preccurlyeq$ est un préordre sur la classe des graphes. Aussi, la relation

$$\mathcal{G} \approx \mathcal{H} \iff [\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \preccurlyeq \mathcal{G}]$$

est une relation d'équivalence sur la classe des graphes. Par la suite, nous ferons, sauf mention contraire, référence à l'ordre $\preccurlyeq$.

Définition 4.2 *Soit X un ensemble et $R \subseteq X^2$. Une partie A de X est dite R-discrète si $A^2 \cap R = \varnothing$.*

Cette propriété est vérifiée lorsque deux points de A ne sont jamais en relation par R. La proposition 2.9 se reformule aisément avec la notion d'ensembles discrets.

Par la suite, l'on confondra un graphe $\mathcal{G}$ et la relation qui lui est associée si l'ensemble des sommets ne laisse pas de doute ; l'on parlera en particulier d'ensembles de sommets $\mathcal{G}$-discrets.

Définition 4.3 *Soit E un ensemble ; on appelle* quasi-partition *de E une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de E deux à deux disjoints et recouvrant E.*

Une partition est donc une quasi-partition dont tous les éléments sont non vides.

Définition 4.4 *Soient α un ordinal, X un ensemble et $\mathcal{G}$ un graphe sur X ; on appelle* α-coloriage *de $\mathcal{G}$ une quasi-partition $(c_i)_{i<\alpha}$ de X telle que $\forall i < \alpha$, c_i soit $\mathcal{G}$-discret. Les éléments de la partition sont appelés* isochromes.

Si X est muni d'une topologie, un α-coloriage de $\mathcal{G}$ est dit borélien *si chaque élément de la partition est un borélien de X.*

α-colorier un graphe $\mathcal{G}$ sur X consiste donc à attribuer à chacun de ses sommets une couleur représentée par un ordinal de α sans donner à deux sommets reliés par une arête la même couleur, ou encore à définir une application « couleur » $X \longrightarrow \alpha$ dont les isochromes sont $\mathcal{G}$-discrets.

En revanche, définir un α-coloriage borélien n'équivaut *pas*, dans le cas général, à définir une application borélienne $X \longrightarrow \alpha$ dont les isochromes sont $\mathcal{G}$-discret ; plus exactement une telle application définit un α-coloriage borélien mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Elle le devient toutefois si α est un ordinal au plus dénombrable.

Pour κ le cardinal de X et $f : \kappa \longrightarrow X$ bijective, $(\{f(i)\})_{i<\kappa}$ est un κ-coloriage de $\mathcal{G}$; c'est même un κ-coloriage borélien dès que X est un espace topologique de Fréchet, c'est-à-dire dont les singletons sont fermés. Cette remarque justifie la définition suivante :

Définition 4.5 *Soit $\mathcal{G}$ un graphe sur l'ensemble X.*

1. *Le* nombre chromatique $\chi(\mathcal{G})$ *de $\mathcal{G}$ est le plus petit cardinal κ tel qu'il existe un κ-coloriage de $\mathcal{G}$.*
2. *Si de plus X est un espace topologique de Fréchet, alors le* nombre chromatique borélien $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G})$ *de $\mathcal{G}$ est le plus petit cardinal κ tel qu'il existe un κ-coloriage borélien de $\mathcal{G}$.*

Proposition 4.6 *Soient X et Y des espaces de Fréchet, $\mathcal{G}$ un graphe sur X et $\mathcal{H}$ un graphe sur Y. Si $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un homomorphisme, alors $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}) \leqslant \chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{H})$.*

En d'autres termes, la classe fonctionnelle $\chi_{\mathscr{B}}$ est croissante pour le préordre $\preccurlyeq$.

Preuve : Soient $\kappa := \chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{H})$ et $(c_i)_{i<\kappa}$ un κ-coloriage borélien de $\mathcal{H}$. $(f^{-1}(c_i))_{i<\kappa}$ forme une quasi-partition borélienne de X, et pour tout $i < \kappa$, pour $x, y \in f^{-1}(c_i)$, $(f(x), f(y)) \in c_i^2$ donc $f(x) \underset{\mathcal{H}}{\not\sim} f(y)$ d'où $x \underset{\mathcal{G}}{\not\sim} y$, c'est-à-dire que $f^{-1}(c_i)$ est $\mathcal{G}$-discret, c'est un κ-coloriage de $\mathcal{G}$, donc $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}) \leqslant \kappa$. ∎

Ainsi, si κ est un cardinal, la classe des graphes de nombre chromatique borélien inférieur à κ est un segment initial. Nous souhaitons ici construire un plus petit graphe (modulo $\approx$) de nombre chromatique borélien non dénombrable.

4.2 Construction de $\mathcal{G}_0$ et propriétés

Proposition 4.7 *Il existe une famille$(s^n)_{n<\omega}$ d'éléments de $\mathcal{C}^*$ telle que $\forall n < \omega$, $s^n \in 2^n$ et $\forall \tau \in \mathcal{C}^*$, $\exists m < \omega$, $\tau \subseteq s^m$.*

Preuve : Pour chaque $k < \omega$, donnons-nous une énumération $\varphi^k : 2^{(k)} \longrightarrow 2^k$ (où $2^{(k)}$ désigne l'exponentiation arithmétique, et 2^k l'exponentiation ensembliste). Notons, pour cette preuve uniquement, $0^{[m]}$ la suite finie constituée de m fois la valeur 0. Pour $0 < n < \omega$, il existe un unique $k < \omega$ tel que $2^{(k)} \leqslant n < 2^{(k+1)}$; et l'on pose alors $s^n := \varphi^k(n - 2^{(k)})^\frown 0^{[n-2^{(k)}]}$. L'on définit par ailleurs $s^0 = \varnothing$. Pour tout $n < \omega$, la suite s^n est donc de longueur n.

Si $\tau \in \mathcal{C}^*$, alors il existe $m < 2^{(|\tau|)}$ tel que $\tau = \varphi^{|\tau|}(m)$; et $\tau \subseteq s^{2^{(|\tau|)}+m}$. ∎

Définition 4.8 *L'on appelle $\mathcal{G}_0$ le graphe $(\mathcal{C}, E)$ où E est l'ensemble :*

$$\{(s^n{}^\frown i^\frown x,\ s^n{}^\frown(1-i)^\frown x) : n < \omega,\ i < 2,\ x \in \mathcal{C}\}$$

L'un des intérêts essentiels de ce graphe réside dans la proposition suivante :

Proposition 4.9 *Soit $A \subseteq \mathcal{C}$ Baire-mesurable. Si A est $\mathcal{G}_0$-discret, alors A est maigre.*

Preuve : Supposons que A soit non-maigre. Par la proposition 3.11, il existe un ouvert U tel que A soit comaigre dans U. U contient un ouvert de base $\mathcal{C}_\sigma$, donc A est comaigre dans $\mathcal{C}_\sigma$ par la proposition 3.2. Il existe alors $k < \omega$ tel que $\sigma \subseteq s^k$; et A est comaigre dans $\mathcal{C}_{s^k}$.

Soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ l'application inversant la $(k+1)^{\text{e}}$ coordonnée. $\mathcal{C}_{s^k}$ est stable par φ ; donc $A \cap \mathcal{C}_{s^k}$ est envoyé par φ sur un sous-ensemble comaigre de $\mathcal{C}_{s^k}$. Par stabilité des comaigres par intersection, $A \cap \varphi(A)$ est comaigre dans $\mathcal{C}_{s^k}$; *a fortiori* $\mathcal{C}_{s^k} \cap A \cap \varphi(A)$ est non vide. Soit $s^k{}^\frown i^\frown x$ un élément de cet ensemble ; $s^k{}^\frown(1-i)^\frown x$ est aussi dans A, donc A n'est pas $\mathcal{G}_0$-discret. ∎

Proposition 4.10 $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}_0) > \aleph_0$.

Preuve : Supposons qu'il existe un ω-coloriage borélien de $\mathcal{G}_0$. Par le théorème 3.13, ses isochromes, boréliennes, auraient la propriété de Baire ; elles seraient donc maigres dans $\mathcal{C}$ d'après la proposition 4.9. Par conséquent, $\mathcal{C}$, réunion dénombrable d'ensembles maigres, serait maigre, donc d'intérieur vide puisqu'il est polonais, donc vide puisqu'il est ouvert. ∎

Nous allons en fait montrer que $\mathcal{G}_0$ est une solution de notre problème, c'est-à-dire qu'il s'agit (modulo $\approx$) du plus petit graphe vérifiant $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}_0) > \aleph_0$. Pour cela nous cherchons à construire, dès que $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}) > \aleph_0$, un homomorphisme borélien de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$

Il est intéressant, pour comprendre la structure de $\mathcal{G}_0$, d'étudier ses « projections » [3] sur les ensembles 2^n, données par $\mathcal{G}_0(n) = (2^n, E_n)$ avec

$$E_n := \left\{ (s^m{}^\frown i^\frown x,\ s^m{}^\frown(1-i)^\frown x) : m < n,\ i < 2,\ x \in 2^{n-m} \right\}$$

Ces graphes finis sont connexes et acycliques.

En particulier, $\mathcal{G}_0(n)$ est l'unique graphe sur $\{\varnothing\}$, et $\mathcal{G}_0(n+1)$ s'obtient à partir de deux copies de $\mathcal{G}_0(n)$ (obtenues comme images par les applications $\sigma \longmapsto \sigma^\frown 0$ et $\sigma \longmapsto \sigma^\frown 1$), recollées par une arête reliant les deux copies de s^n.

Ainsi, il faut et il suffit pour construire un homomorphisme de graphes de $\mathcal{G}_0(n+1)$ dans (V, E) d'avoir deux homomorphismes $\mathcal{G}_0(n) \longrightarrow (V, E)$ tels que les images de s^n soient en relation par E, par une opération de recollement.

Nous pouvons bien sûr définir des applications continues de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{N}$, et donc dans tout ensemble analytique, par une opération de limite projective sur les $\mathcal{G}_0(n)$: si nous nous donnons pour tout $n < \omega$ une application $u_n : 2^n \longrightarrow \omega^n$, et si de plus pour tout $n < \omega$, $x \in 2^n$ et $y \in 2^{n+1}$, $x \subseteq y$ implique $u^n(x) \subseteq u^{n+1}(y)$, alors

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & x & \longmapsto & \bigcup_{n<\omega} u^n(x_{\restriction n}) \end{array}$$

est une application continue, puisque $\pi(x)_{\restriction n} = u^n(x_{\restriction n})$. Cependant, ce procédé ne suffit pas pour transporter la structure de graphe de $\mathcal{G}_0$. Nous aurons, pour cela, besoin d'hypothèses plus fortes, qui seront introduites au lemme 4.14

3. Le terme « projection » est mis entre guillemets, car $\mathcal{G}_0(n)$ n'est *pas* l'image de $\mathcal{G}_0$ par l'application $x \in \mathcal{C} \longmapsto x_{\restriction n} \in 2^n$: cette dernière contient en plus des boucles (arêtes reliant un élément à lui-même), et n'est donc pas un graphe.

4.3 Théorème de Kechris – Solecki – Todorcevic

Théorème 4.11 (Kechris – Solecki – Todorcevic) *Soient X un espace polonais et $\mathcal{G}$ un graphe analytique sur X. L'une exactement de ces assertions est vraie :*

(i) Il existe un ω-coloriage borélien de $\mathcal{G}$.

(ii) Il existe un homomorphisme continu de graphes de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$.

Nous présentons une preuve due à Benjamin Miller.

Preuve : Les assertions (i) et (ii) sont mutuellement exclusives. En effet, (i) entraîne que $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}) \leqslant \aleph_0$ et (ii) couplée à la proposition 4.6 que $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}_0) \leqslant \chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G})$; leur conjonction violerait donc la proposition 4.10.

Donnons-nous pour la suite deux surjections continues $\varphi_X : \mathcal{N} \longrightarrow X$ et $\varphi_{\mathcal{G}} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{G}$.

Définition 4.12 *On appelle* n-approximation *un couple (u, v) où $u : 2^n \longrightarrow \omega^n$ et $v : 2^{<n} \longrightarrow \omega^n$.*

Une extension *de la n-approximation (u, v) est une $(n+1)$-approximation telle que pour tous $\sigma \in 2^n$, $\tau \in 2^{<n}$ et $i < 2$, $u(\sigma) \subseteq u'(\sigma \frown i)$ et $v(\tau) \subseteq v'(\tau \frown i)$.*

Ces *approximations* sont les briques qui nous permettront, en composant avec φ_X, de construire un morphisme de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$. Le deuxième élément du couple servira de témoin du fait que deux éléments reliés sont bien envoyés sur deux éléments reliés. Certaines approximations ne nous seront d'aucun intérêt pour construire des morphismes, d'où les définitions suivantes.

Définition 4.13 *Soit $Y \subseteq X$; l'on appelle Y-réalisation de (u, v) un couple (f, g) avec $f : 2^n \longrightarrow \mathcal{N}$ et $g : 2^{<n} \longrightarrow \mathcal{N}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\forall \sigma \in 2^n$, $u(\sigma) \subseteq f(\sigma)$;

(ii) $\forall \tau \in 2^{<n}$, $v(\tau) \subseteq g(\tau)$;

(iii) $\forall k < n$, $\forall \tau \in 2^{n-k-1}$, $\varphi_{\mathcal{G}} \circ g(\tau) = \big(\varphi_X \circ f(s^k \frown 0 \frown \tau),\ \varphi_X \circ f(s^k \frown 1 \frown \tau)\big)$;

(iv) $\varphi_X \circ f(2^n) \subseteq Y$.

$R(u, v, Y)$ désigne l'ensemble des Y-réalisations de (u, v).

(u, v) est dite Y-réalisable *si $R(u, v, Y)$ est non vide, et* Y-terminale *si elle est Y-réalisable et si aucune de ses extensions ne l'est. $\Re(Y)$ désigne l'ensemble des approximations Y-réalisables et $T(Y)$ l'ensemble des approximations Y-terminales.*

Si (f, g) est une Y-réalisation de (u, v), alors g assure que $\varphi_X \circ f$ soit un homomorphisme de $\mathcal{G}_0(n)$ dans $\mathcal{G}$ en indiquant l'arête sur laquelle est envoyée une arête de $\mathcal{G}_0(n)$.

L'ensemble des approximations Y-réalisables pour un certain ensemble Y, muni de la clôture transitive de la relation « est une extension de » a une structure d'arbre dont l'unique 0-approximation (u^0, v^0) avec $u^0 : \{\varnothing\} \longrightarrow \{\varnothing\}$ et $v^0 : \varnothing \longrightarrow \{\varnothing\}$ est racine, et dont les feuilles sont les approximations Y-terminales. Remarquons que $Z \longmapsto \Re(Z)$ est croissante. Le lemme suivant nous montre comment conclure lorsque $\Re(X)$ contient une branche infinie de racine (u^0, v^0).

Lemme 4.14 *Soit* $(u^n, v^n)_{n<\omega}$ *une famille approximations* X*-réalisables telles que* $\forall n < \omega$, (u^n, v^n) *soit une* n*-approximation et* (u^{n+1}, v^{n+1}) *une extension de* (u^n, v^n)*. Alors pour*

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & x & \longmapsto & \bigcup_{n<\omega} u^n(x_{\restriction n}) \end{array}$$

l'application $\varphi_X \circ \pi$ *est un homomorphisme continu de* $\mathcal{G}_0$ *dans* $\mathcal{G}$.

Preuve : La continuité π a déjà été prouvée ; $\varphi_X \circ \pi$ est donc aussi continue. Il suffit alors de vérifier que pour tous $k < \omega$ et $x \in \mathcal{N}$, $(\varphi_X \circ \pi(s^k {}^\frown 0 {}^\frown x), \varphi_X \circ \pi(s^k {}^\frown 1 {}^\frown x))$ est dans $\mathcal{G}$.

À l'aide des applications auxiliaires v^n, nous définissons pour tout $k < \omega$ l'application témoin :

$$\begin{array}{rccl} t_k & : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & x & \longmapsto & \bigcup_{n<\omega} v^{n+k+1}(x_{\restriction n}) \end{array}$$

qui est aussi continue. Montrons que $\big(\varphi_X \circ \pi(s^k {}^\frown 0 {}^\frown x),\ \varphi_X \circ \pi(s^k {}^\frown 1 {}^\frown x)\big) = \varphi_{\mathcal{G}} \circ t_k(x)$.

Pour cela, il suffit de prouver que tout voisinage ouvert de

$$\Big(t_k(x), \Big(\pi(s^k {}^\frown 0 {}^\frown x),\ \pi(s^k {}^\frown 1 {}^\frown x)\Big)\Big)$$

contient un point $(z, (z_0, z_1))$ tel que $\varphi_G(z) = (\varphi_X(z_0), \varphi_X(z_1))$. En ce cas, tout voisinage de $\big(t_k(x), \big(\pi(s^k {}^\frown 0 {}^\frown x), \pi(s^k {}^\frown 1 {}^\frown x)\big)\big)$ intersecte $(\varphi_{\mathcal{G}}, (\varphi_X, \varphi_X))^{-1}(\Delta)$, où Δ est la diagonale de $(X^2)^2$. Or, X^2 est séparé, donc Δ est fermée ; aussi le couple $\big(t_k(x), \big(\pi(s^k {}^\frown 0 {}^\frown x), \pi(s^k {}^\frown 1 {}^\frown x)\big)\big)$ est-il adhérent au fermé $(\varphi_{\mathcal{G}}, (\varphi_X, \varphi_X))^{-1}(\Delta)$. Par conséquent, il y appartient, ce qui entraîne l'égalité recherchée.

Fixons donc un tel voisinage, que l'on peut supposer être de la forme $U \times V$ avec U ouvert de $\mathcal{N}$ et V ouvert de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Les $\big(\mathcal{N}_{y_{\restriction n}}\big)_{n<\omega}$ formant une base de voisinages de tout $y \in \mathcal{N}$, il existe $n < \omega$ tel que

$$\mathcal{N}_{v^{k+n+1}(x_{\restriction n})} \subseteq U \quad \text{ et } \quad \mathcal{N}_{u^{k+n+1}(s^k {}^\frown 0 {}^\frown (x_{\restriction n}))} \times \mathcal{N}_{u^{k+n+1}(s^k {}^\frown 1 {}^\frown (x_{\restriction n}))} \subseteq V$$

Alors pour (f, g) une réalisation de (u^{n+k+1}, v^{n+k+1}), les points $z = g(x_{\restriction n})$, $z_0 = f(s^k {}^\frown 0 {}^\frown (x_{\restriction n}))$ et $z_1 = f(s^k {}^\frown 1 {}^\frown (x_{\restriction n}))$ appartiennent aux voisinages ouverts de base précédemment choisis et vérifient $\varphi_{\mathcal{G}}(z) = (\varphi_X(z_0), \varphi_X(z_1))$, ce qui conclut. ∎

Pour construire une telle branche infinie d'approximations réalisables, nous allons, comme dans la preuve du théorème de Cantor – Bendixon, introduire une notion d'ensemble dérivé adaptée au problème. Dériver un ensemble Y permettra d'éliminer des parties correspondant à un défaut apparaissant lors d'une tentative de construction d'un homomorphisme de $\mathcal{G}_0$ sur $\mathcal{G}$: l'arbre des approximations Y' réalisable sera inclus dans celui des approximations Y-réalisables duquel les approximations terminales auront été retirées (arbre *dérivé*). Parallèlement, la restriction de $\mathcal{G}$ à l'ensemble des points écartés possédera un coloriage borélien dénombrable.

En répétant l'opération $\aleph_0$ fois, nous aboutirons à un noyau K égal à sa propre dérivée, c'est-à-dire que l'arbre des approximations K-réalisables sera sans feuilles, donc vide ou bien constitué uniquement de branches infinies. Dans le premier cas, K sera vide et $\mathcal{G}$ ω-Borel colorable ; dans le second, le lemme précédent permettra de conclure à l'existence d'un homomorphisme de $\mathcal{G}_0$ sur $\mathcal{G}$.

À cette fin, définissons pour (u, v) une n-approximation et $Y \subseteq X$ l'ensemble des *interfaces* de (u, v) :

$$I(u, v, Y) := \{\varphi_X \circ f(s^n) : \exists g, (f, g) \in R(u, v, Y)\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des points de X susceptibles d'avoir s^n pour antécédent dans une réalisation de (u, v).

La clef de la preuve réside dans le lemme suivant, qui fait apparaître une partie $\mathcal{G}$-discrète chaque fois que nous trouvons une approximation terminale. En effet, si nous disposons de deux réalisations d'une n-approximation (u, v), chacune correspondant à un homomorphisme de $\mathcal{G}_0(n)$ dans $\mathcal{G}$, il suffit pour étendre (u, v) en une approximation réalisable de les recoller en un morphisme de $\mathcal{G}_0(n+1)$ dans $\mathcal{G}$. Un tel recollement suppose de trouver une arête de $\mathcal{G}$ sur laquelle envoyer $(s^n {}^\frown 0, s^n {}^\frown 1)$, ce qui est possible dès que $I(u, v, Y)$ n'est pas $\mathcal{G}$-discret.

Lemme 4.15 *Si (u, v) est Y-terminale, alors $I(u, v, Y)$ est $\mathcal{G}$-discret.*

Preuve : Soit $n < \omega$ tel que (u, v) soit une n-approximation. Supposons que $I(u, v, Y)$ ne soit pas $\mathcal{G}$-discret. Alors il existe deux Y-réalisations (f^0, g^0) et (f^1, g^1) de (u, v) telles que $(\varphi_X \circ f^1(s^n), \varphi_X \circ f^0(s^n))$ soit dans $\mathcal{G}$, et soit donc un $\varphi_{\mathcal{G}}(x)$ pour un certain $x \in \mathcal{N}$. Posons pour $\sigma \in 2^n$, $i < 2$ et $\tau \in 2^{<n}$: $u'(\sigma {}^\frown i) := u(\sigma)^\frown \left(f^i(\sigma)\right)_n$, $v'(\varnothing) = x_{\restriction n+1}$ et $v'(\tau {}^\frown i) := v(\tau)^\frown \left(g^i(\tau)\right)_n$. (u', v') est une extension de (u, v).

Posons par ailleurs $f(\sigma {}^\frown i) := f^i(\sigma)$, $g(\varnothing) := x$ et $g(\tau {}^\frown i) := g^i(\tau)$. Immédiatement, $\varphi_X \circ f(2^{n+1}) = \varphi_X \circ f^0(2^n) \cup \varphi_X \circ f^1(2^n) \subseteq Y$. De plus, $u'(\sigma {}^\frown i) = (f(\sigma {}^\frown i))_{\restriction n+1}$ et $v'(\tau {}^\frown i) = (g(\tau {}^\frown i))_{\restriction n+1}$ puisque les (f^i, g^i) sont des réalisations de (u, v) ; et $v'(\varnothing) = (g(\varnothing))_{\restriction n+1}$. Enfin,

$$(\varphi_X \circ f(s^n {}^\frown 0), \varphi_X \circ f(s^n {}^\frown 1)) = (\varphi_X \circ f^0(s^n), \varphi_X \circ f^1(s^n)) = \varphi_{\mathcal{G}}(x) = \varphi_{\mathcal{G}} \circ g(\varnothing)$$

et pour tout $k < n$, $\tau \in 2^{n-k-1}$, et $i < 2$,

$$\begin{aligned}(\varphi_X \circ f(s^k {}^\frown 0 {}^\frown \tau {}^\frown i), \varphi_X \circ f(s^k {}^\frown 1 {}^\frown \tau {}^\frown i)) &= (\varphi_X \circ f^i(s^n {}^\frown 0 {}^\frown \tau), \varphi_X \circ f^i(s^n {}^\frown 1 {}^\frown \tau)) \\ &= \varphi_{\mathcal{G}} \circ g^i(\tau) \\ &= \varphi_{\mathcal{G}} \circ g(\tau {}^\frown i)\end{aligned}$$

(f, g) est donc une Y-réalisation de (u', v') ; d'où $(u, v) \notin T(Y)$. ■

Ceci nous assure, si nous disposons d'une approximation Y-terminale, de l'existence d'un ensemble $\mathcal{G}$-discret, donc susceptible de former une isochrome dans un coloriage de $\mathcal{G}$. Nous souhaitons plus précisément que celui-ci soit borélien.

Or, $R(u, v, Y)$ est un sous-ensemble de l'espace polonais $\mathcal{N}^{2^n} \times \mathcal{N}^{2^{<n}}$ et $I(u, v, Y)$ en est l'image par l'application de projection sur la coordonnée s^n composée avec φ_X, continue par définition de la topologie produit. Dans la définition d'une Y-réalisation,

— (i) et (ii) sont des conditions ouvertes : elles imposent qu'un nombre fini de projections soient dans des ouverts de base $\mathcal{N}_{u(\sigma)}$ et $\mathcal{N}_{v(\tau)}$;

— la condition (iii) est fermée : elle signifie qu'un nombre fini de projections sont dans $(\varphi_{\mathcal{G}}, (\varphi_X, \varphi_X))^{-1}(\Delta)$ où $(\varphi_{\mathcal{G}}, (\varphi_X, \varphi_X))$ est continue et Δ diagonale de $(X^2)^2$ est fermée car X^2 est séparé ;

— la condition (iv) est borélienne : elle assure qu'un nombre fini de projections soient dans $\varphi_X^{-1}(Y)$, où φ_X est continue et Y supposé borélien.

Aussi, $R(u,v,Y)$ est borélien, donc $I(u,v,Y)$ est analytique. La proposition 2.9 assure, si Y est borélien, l'existence d'une isochrome borélienne $B(u,v,Y)$ incluant $I(u,v,Y)$.

Posons alors $Y' := Y \setminus \bigcap_{(u,v)\in T(Y)} B(u,v,Y)$ la *dérivée de Miller* de Y. L'ensemble des approximations étant dénombrable, Y' est borélienne. Donnons-nous une énumération $(u_n,v_n)_{n<\omega}$ de l'ensemble des approximations. Nous pouvons colorier $\mathcal{G}_{\restriction Y\setminus Y'}$ en posant

$$\begin{array}{rcrcl} c_Y & : & Y\setminus Y' & \longrightarrow & \omega \\ & & y & \longmapsto & \min\{n<\omega : (u_n,v_n)\in T(Y) \wedge y \in B(u_n,v_n,Y)\} \end{array}$$

c_Y est un ω-coloriage borélien de $\mathcal{G}_{\restriction Y\setminus Y'}$: en effet, pour tout $n<\omega$, si $(u_n,v_n)\notin T(Y)$ alors $c_Y^{-1}(\{n\})=\varnothing$; sinon

$$c_Y^{-1}(\{n\}) = B(u_n,v_n,Y) \quad \setminus \bigcup_{\substack{k<n \\ (u_k,v_k)\in T(Y)}} B(u_k,v_k,Y)$$

est une partie borélienne, incluse dans des parties de la forme $B(u_n,v_n,Y)$ et par définition $\mathcal{G}$-discrète.

Lemme 4.16 *Soit Y un borélien de X. $\Re(Y')\cap T(Y)=\varnothing$.*

Preuve : Soit (u,v) une n-approximation Y-terminale. Supposons que (f,g) en soit une Y'-réalisation ; c'en est *a fortiori* une Y-réalisation. Mais alors $\varphi_X\circ f(s^n)\in Y'$, et $\varphi_X\circ f(s^n)\in I(u,v,Y)\subseteq B(u,v,Y)$, ce qui est impossible par définition de Y', puisque (u,v) est Y-terminale. ∎

Définissons une famille décroissante $\left(X^{(\alpha)}\right)_{\alpha<\omega_1}$ de parties boréliennes de X par récurrence transfinie en posant $X^{(0)}:=X$, $X^{(\alpha+1)}:=\left(X^{(\alpha)}\right)'$, et pour α un ordinal limite,

$$X^{(\alpha)} := \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$$

La famille $\left(\Re(X^{(\alpha)})\right)_{\alpha<\omega_1}$ est décroissante elle-aussi, et $\Re(X)$ est dénombrable, ce qui assure comme dans la preuve du théorème de Cantor – Bendixon (1.16) l'existence d'un rang $\alpha_\ell<\omega_1$ tel que $\Re\left(X^{(\alpha_\ell)}\right)=\Re\left(X^{(\alpha_\ell+1)}\right)$. Notons $K=X^{(\alpha_\ell)}$ le noyau de X. D'après le lemme 4.16, $\Re(K)$ ne contient pas d'approximation K-terminale. Il suit que $K'=K$: le noyau est stable par dérivation.

Si K est vide, alors $X=\bigcup_{\beta<\alpha_\ell}\left(X^{(\beta)}\setminus X^{(\beta+1)}\right)$. α_ℓ est dénombrable et les $\mathcal{G}_{\restriction\left(X^{(\beta)}\setminus X^{(\beta+1)}\right)}$ admettent tous un ω-coloriage borélien $c_{X^{(\beta)}}$; donc $\mathcal{G}$ admet un $\omega\cdot\alpha$-coloriage donné par $c(y)=\omega\cdot\beta+c_{X^{(\beta)}}(y)$ pour $y\in\left(X^{(\alpha)}\setminus X^{(\alpha+1)}\right)$. Puisqu'il existe une injection borélienne de $\omega\cdot\alpha$ dans ω, $\mathcal{G}$ possède un ω-coloriage borélien.

Dans le cas contraire, soit $x\in K$. Alors pour $f:\{\varnothing\}\longrightarrow\mathcal{N}$ telle que $\varphi_X\circ f(\varnothing)=x$, $g:\varnothing\longrightarrow\mathcal{N}$, (f,g) est une K-réalisation de la 0-approximation (u^0,v^0). Puisqu'il n'existe pas d'approximation K-terminale, l'on peut construire grâce à l'axiome du choix dépendant une suite d'approximations K-réalisables vérifiant les hypothèses du lemme 4.14, ce qui conclut la preuve. ∎

Corollaire 4.17 *Soient X un espace polonais et $\mathcal{G}$ un graphe analytique sur X. Si $\mathcal{G}_0 \not\succcurlyeq \mathcal{G}$, alors l'homomorphisme $X \longrightarrow \mathcal{C}$ peut être choisi continu.*

Preuve : En effet, sous cette hypothèse, $\chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}) \geqslant \chi_{\mathscr{B}}(\mathcal{G}_0) > \aleph_0$ d'après la proposition 4.10 ; donc le théorème de Kechris – Solecki – Todorcevic assure l'existence d'un homomorphisme *continu* de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$. ∎

Une fois la dichotomie $\mathcal{G}_0$ démontrée, nous pouvons aisément prouver le théorème de Silver. Notons, de façon indépendante, que le théorème de Kechris – Solecki – Todorcevic permet de généraliser le corollaire 1.26 des boréliens aux analytiques.

Théorème 4.18 (Souslin) *Soient X un espace polonais et $A \subseteq X$ une partie analytique. A est au plus dénombrable ou contient un ensemble parfait.*

Preuve : Fixons une distance d sur $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{G}$ le graphe $(X, A^2 \backslash \Delta)$ où Δ est la diagonale de A. Remarquons qu'une partie $\mathcal{G}$-discrète contient au plus un point de A.

Si $\mathcal{G}$ possède un ω-coloriage borélien, alors A est dénombrable. Sinon le théorème 4.11 assure l'existence d'un homomorphisme continu $\varphi : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}$.

Lemme 4.19 *Soit U un ouvert non vide de $\mathcal{C}$. Il existe V_0, V_1 ouverts non vides de X tels que $\overline{V_0} \cup \overline{V_1} \subseteq U$ et $\varphi(V_0) \cap \varphi(V_1) = \varnothing$.*

Preuve : U étant non vide, il contient un ouvert de base $\mathcal{C}_\sigma$ avec $\sigma \in \mathcal{C}^*$. Fixons $\tau \in \mathcal{C}$. Soient $y_0 := \sigma \frown 0 \frown \tau$ et $y_1 = \sigma \frown 1 \frown \tau$. $y_0 \underset{\mathcal{G}_0}{\sim} y_1$ donc $\varphi(y_0) \underset{\mathcal{G}}{\sim} \varphi(y_1)$. Par conséquent, $\varphi(y_0) \neq \varphi(y_1)$.

Or, X est séparé donc il existe W_0 et W_1 ouverts de X disjoints contenant respectivement $\varphi(y_0)$ et $\varphi(y_1)$. $\varphi^{-1}(W_0)$ et $\varphi^{-1}(W_1)$ sont disjoints ; de plus φ étant continue, ils sont ouverts. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(y_i, 2\varepsilon) \subseteq W_i$ pour $i < 2$. Alors les $V_i := B(y_i, \varepsilon)$ conviennent. ∎

Nous définissons grâce au lemme un arbre décroissant $(U_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{C}^*}$ d'ouverts de $\mathcal{C}$ tels que :

(i) $U_\varnothing = \mathcal{C}$;

(ii) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $\sigma \neq \varnothing \implies \mathrm{diam}(U_\sigma) < 2^{-n}$;

(iii) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $\forall i < 2$, $\varphi(U_{\sigma \frown 0}) \cap \varphi(U_{\sigma \frown 1}) = \varnothing$;

(iv) $\forall \sigma \in \mathcal{C}^*$, $\forall i < 2$, $\overline{U_{\sigma \frown i}} \subseteq U_\sigma$.

Tout comme dans la preuve du théorème 3.22, l'on montre que pour tout $x \in \mathcal{C}$, $\bigcap_{n<\omega} U_{x \restriction n}$ est un singleton $\{\psi(x)\}$ et que $\psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est continue et injective. Ainsi, $\varphi \circ \psi$ est un plongement de $\mathcal{C}$ dans A. ∎

Notons que si A est au plus dénombrable, alors A est borélienne. Ainsi, toute partie analytique non borélienne d'un espace polonais a exactement la puissance du continu.

5 Preuve du théorème de Silver et applications

Dans cette dernière partie, nous appliquons la dichotomie $\mathcal{G}_0$ pour démontrer le théorème de Silver. Nous obtenons ainsi une alternative sur la structure ensembliste et topologique des classes d'une relation d'équivalence coanalytique sur un espace polonais.

5.1 Cas dénombrable

Théorème 5.1 (Silver) *Soient X un espace polonais et E une relation coanalytique sur X. Alors l'une des deux propositions suivantes exactement est vraie :*

(i) E possède au plus $\aleph_0$ classes, et celles-ci sont boréliennes.

(ii) E possède au moins $2^{\aleph_0}$ classes, et il existe un plongement de $\mathcal{C}$ dans X tel que deux points distincts soient envoyés dans deux classes distinctes de E.

Preuve : Soit $\mathcal{G} = (X, X^2 \backslash E)$. $\mathcal{G}$ est un graphe analytique, et un ensemble est $\mathcal{G}$-discret si et seulement s'il est inclus dans une classe par E.

S'il existe un ω-coloriage borélien $\mathcal{G}$, alors toutes les isochromes sont $\mathcal{G}$-discrètes donc incluses dans une seule classe de E. Par conséquent, il existe au plus $\aleph_0$ classes distinctes, et toute classe est réunion d'une famille au plus dénombrable d'isochromes boréliennes, donc est borélienne elle-même.

Dans le cas contraire, il existe par le théorème 4.11 un homomorphisme continu φ de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$. Posons $F := (\varphi, \varphi)^{-1}(E)$; c'est une image réciproque de relation d'équivalence donc une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$. Puisque E est coanalytique et (φ, φ) continue, F est coanalytique par la proposition 2.6, donc a la propriété de Baire.

Rappelons que la section E_x est la classe de x pour E. Pour tout $y \in \mathcal{C}$, E_y étant $\mathcal{G}$-discret, $F_y = \varphi^{-1}(E_{\varphi(y)})$ est $\mathcal{G}_0$-discret. En tant que section de F, F_y est coanalytique et donc Baire-mesurable. Par la proposition 4.9, c'est donc une partie maigre de $\mathcal{C}$. X^2 est polonais, et a donc une topologie de Baire, donc par le théorème de Kuratowski – Ulam (3.20), F est maigre.

De plus $\mathcal{C}$ est parfait. Ainsi, d'après le théorème de Mycielski (3.22), il existe un plongement π de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ tel que si $x \neq y$, alors $\pi(x) \underset{F}{\not\sim} \pi(y)$ soit $\varphi \circ \pi(x) \underset{E}{\not\sim} \varphi \circ \pi(y)$; $\varphi \circ \pi : \mathcal{C} \longrightarrow X$ convient pour le plongement recherché. ∎

Ce théorème nous permet notamment d'ébaucher une classification des relations d'équivalence coanalytiques sur les espaces boréliens.

Définition 5.2 *Soient (X, R) et (Y, S) des espaces topologiques munis d'une relation binaire. Une application borélienne $f : X \longrightarrow Y$ est appelée une* réduction de R à S *si* $\forall x_0, x_1 \in X$, $x_0 \underset{R}{\sim} x_1 \iff f(x_0) \underset{S}{\sim} f(x_1)$

Contrairement aux homomorphismes de graphes définis précédemment, une réduction ne perd pas d'information : il faut et il suffit, pour déterminer si deux éléments sont en relation pour R, vérifier s'ils sont en relation pour S. La relation « se réduit à » est un préordre sur la classe des relations binaires.

Corollaire 5.3 *La plus petite (au sens des réductions boréliennes) relation d'équivalence coanalytique sur un espace polonais ayant un nombre de classes non dénombrable est l'égalité sur l'ensemble de Cantor*

Preuve : Supposons que E soit une relation coanalytique sur un espace polonais ayant un nombre non dénombrable de classes. Le théorème de Silver assure qu'il existe une application continue $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow X$ telle que $\forall x, y \in \mathcal{C}, x \neq y \implies \varphi(x) \underset{E}{\not\sim} \varphi(y)$. Alors φ est une réduction de $(\mathcal{C}, =)$ à (X, E). ∎

La classification des relations dont l'ensemble des classes est dénombrable présente peu d'intérêt, puisque le cardinal de l'ensemble des classes détermine l'existence ou non de réductions d'une relation à une autre. Cependant, nous pourrions mener l'étude au niveau supérieur, c'est-à-dire classifier les relations d'équivalence ne se réduisant pas à $(\mathcal{C}, =)$, en nous appuyant sur des alternatives de même nature que la dichotomie $\mathcal{G}_0$, présentées dans [5].

5.2 Généralisations

Dans cette section, nous donnons un schéma de preuve d'une généralisation de la dichotomie $\mathcal{G}_0$ et présentons une application à la théorie des modèles.

Définition 5.4 *Soient X un espace topologique et α un ordinal infini. X est dit α-souslinien s'il existe une surjection continue $f : \alpha^\omega \longrightarrow X$.*

En particulier, les ensembles analytiques sont exactement les ω-sousliniens.

Théorème 5.5 (Kanovei) *Soient κ un cardinal infini, X un espace séparé et $\mathcal{G}$ un graphe sur X κ-souslinien. Alors exactement l'une des assertions suivantes est vraie :*

(i) Il existe un κ-coloriage de $\mathcal{G}$.

(ii) Il existe un homomorphisme continu de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$.

La preuve de ce résultat est semblable à celle de Kechris – Solecki – Todorcevic (4.11). Tous les résultats énoncés précédemment se généralisent à des ensembles κ-sousliniens en supposant toujours l'axiome du choix dépendant, la seule opération rendue impossible étant le choix d'un borélien $\mathcal{G}$-discret contenant un analytique $\mathcal{G}_0$-discret donné (le lemme 2.9 n'est plus valable) ; pour cette raison l'on ne peut *a priori* plus supposer le κ-coloriage dans le cas (i) borélien.

Par ailleurs, ce dernier résultat implique des versions plus puissantes du théorème de Silver. Une application fort intéressante de celui-ci pour les ensembles $\aleph_1$-sousliniens est donnée par le théorème suivant ([6], théorème 3.4) :

Théorème 5.6 (Morlay) *Soit T une théorie dénombrable complète du premier ordre. Alors T a soit au plus $\aleph_1$ soit exactement $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables non isomorphes.*

La *conjecture de Vaught*, encore non démontrée, affirme que T ne peut, de plus, pas avoir $\aleph_1$ modèles dénombrables non isomorphes, c'est-à-dire que la classe des modèles dénombrables considérés à isomorphisme près est dénombrable ou a la puissance du continu.

Références

[1] Lev Bukovský. *The Structure of the Real Line*, volume 71 of *Monografie Matematyczne*. Springer Basel, 2011.

[2] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] David Marker. Descriptive set theory. 2002.

[4] Benjamin D. Miller. Forceless, ineffective, powerless proofs of descriptive dichotomy theorems — lecture 1 : Silver's theorem.

[5] Benjamin D. Miller. The graph-theoretic approach to descriptive set theory.

[6] Michael Morley. The number of countable models. *The Journal of Symbolic Logic*, 35(1), mars 1970.

[7] Christian Rosendal. Descriptive set theory. 2015.

[8] Saharon Shelah. Can you take solovay's inaccessible away ? *Israel Journal of Mathematics*, 48(1), december 1984.