

Approfondissement de cours C9 : plus de dichotomies

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

30 mars 2021

Le but de ce sujet est de faire étudier des résultats plus « profonds » d'analyse en exploitant à nouveau des dichotomies.

Les deux parties du sujet sont indépendantes.

1 Seules les fonctions constantes ont une dérivée nulle

L'objectif de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit I un intervalle et f dérivable sur I . On suppose que f' est nulle sur I . Alors f est une fonction constante.*

1. Énoncer la réciproque de ce théorème, et vérifier qu'elle est évidente.

On se donne un intervalle I et une fonction f dérivable sur I de dérivée nulle. On choisit $x, y \in I$ tels que $x < y$, et l'on va démontrer que $f(x) = f(y)$.

On suppose d'abord que $f(x) \leq f(y)$.

On construit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par récurrence en posant :

— $x_0 = x, y_0 = y$

— Si x_n et y_n sont construits, on pose $m_n = \frac{x_n + y_n}{2}$. Alors :

— Si $f(m_n) > \frac{f(x_n) + f(y_n)}{2}$, alors $y_{n+1} = m_n$ et $x_{n+1} = x_n$.

— Sinon, $x_{n+1} = m_n$ et $y_{n+1} = y_n$.

De cette façon, l'intervalle $[x_n, y_n]$ « capture » les variations de f les plus importantes possibles.

Pour tous $a, b \in I$, on note $\tau(a, b)$ le taux d'accroissement de f entre a et b si $a \neq b$, et $\tau(a, b) = f'(a) = f'(b) = 0$ si $a = b$.

2. Justifier que $\tau(x, y) \geq 0$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\tau(x_n, y_n) \geq \tau(x, y)$.

4. En vous inspirant de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, justifier que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admettent une limite commune, que l'on appellera ℓ .

5. Calculer les limites des suites $(\tau(x_n, \ell))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\tau(\ell, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n \in [0, 1]$ l'unique nombre tel que $\ell = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n$.

6. Calculer α_n .

7. Exprimer $\tau(x_n, y_n)$ en fonction de $\tau(x_n, \ell)$, $\tau(\ell, y_n)$ et α_n . En déduire que $\tau(x_n, y_n) \leq \tau(x_n, \ell) + \tau(\ell, y_n)$.

8. Démontrer que $f(x) = f(y)$.

9. Démontrer que l'on arrive à la même conclusion dans le cas où $f(x) \geq f(y)$, et conclure.

2 Extractions de suite

2.1 Définitions et premières propriétés

On appelle *extractrice* toute fonction $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante.

Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite et φ une extractrice, on dit que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est une *suite extraite* de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

1. Soit φ une extractrice. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p(n) = 2n$ et $i(n) = 2n + 1$. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ divergente, mais telle que $(u_{p(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_{i(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ admettent chacune une limite.

3. Dans l'exemple suivant, est-il possible que $(u_{p(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_{i(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ admettent la même limite? Si oui, donner un exemple, sinon démontrer que c'est impossible.

4. Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge également vers la même limite. *On utilisera la définition d'une limite de suite « avec des epsilons ».*

2.2 Le théorème de Bolzano-Weierstraß (difficile)

Cette section consiste à démontrer un théorème extrêmement puissant, qui intervient dans de très nombreux domaines de l'analyse :

Théorème 2 (Bolzano-Weierstraß) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite prenant toute ses valeurs dans un intervalle $[a, b]$. Alors il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge.

On admet le résultat (intuitif) suivant — qui se trouve en réalité être un axiome de \mathbf{N} :

Axiome 3 Si E est un sous-ensemble non-vide de \mathbf{N} , alors il possède un plus petit élément.

1. Considérons deux ensembles A et B .

(a) Justifier que si A et B sont tous les deux finis, alors $A \cup B$ est fini.

(b) En déduire que si $A \cup B$ est infini, alors A est infini ou B est infini.

(c) En déduire que si A est infini et B est fini, alors $A \setminus B$ (l'ensemble obtenu en retirant de A tous les éléments qui sont dans B) est infini.

On considère désormais une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et deux réels $a < b$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a \leq u_n \leq b$.

On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi que les ensembles A_n , B_n et C_n comme suit :

— $x_0 = a$, $y_0 = b$, $C_0 = \mathbf{N}$.

— Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $A_n = \{k \in \mathbf{N} : x_n \leq u_k \leq m_n\}$ et $B_n = \{k \in \mathbf{N} : m_n \leq u_k \leq y_n\}$. Alors :

— Si A_n est un ensemble infini, on pose $y_{n+1} = m_n$, $x_{n+1} = x_n$ et $C_{n+1} = A_n$.

— Sinon, on pose $x_{n+1} = m_n$, $y_{n+1} = y_n$ et $C_{n+1} = B_n$.

2. Justifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, C_n est un ensemble infini et $C_n = A_n \cup B_n$. En déduire que toutes les suites considérées sont bien définies.

3. En vous inspirant de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires une fois encore, justifier que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admettent une limite commune ℓ .

4. Construire une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leq u_{\varphi(n)} \leq y_n$. On pourra, une fois $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ définis, s'intéresser à l'ensemble $C_{n+1} \setminus \{0, 1, \dots, \varphi(n)\}$.

5. Conclure.

2.3 Application : le théorème des bornes et ses conséquences

On donne le résultat (intuitif mais en réalité non évident) suivant :

Théorème 4 *Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . Si pour tout $x, y \in E$, $[x, y] \subseteq E$, alors E est un intervalle.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , et f une fonction continue sur I .

1. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires et du résultat admis, démontrer que $f(I)$ est un intervalle. *On rappelle que $f(I)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par f sur l'intervalle I .*

$f(I)$ est donc un ensemble ayant l'une des quatre formes suivantes : $]c, d[$, $]c, d]$, $[c, d[$ ou $[c, d]$ avec $c, d \in \overline{\mathbf{R}}$ (ils peuvent donc être infinis).

On suppose désormais que I est un segment, c'est-à-dire de la forme $[a, b]$, et l'on souhaite également démontrer que I est un segment.

On raisonne par l'absurde en supposant d'abord que $f(I)$ est ouvert à droite.

2. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans I telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers d . *On pourra raisonner par l'absurde en distinguant les cas d fini et d infini.*

3. Justifier qu'il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge. Que peut-on dire de la limite de la suite $(f(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbf{N}}$?

4. En déduire qu'il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $d = f(\ell)$, et conclure à une absurdité.

5. Démontrer de même qu'il existe $\ell' \in [a, b]$ tel que $c = f(\ell')$.

On a démontré le théorème suivant :

Théorème 5 (théorème des bornes, ou de Bolzano) *Si f est une fonction continue sur un segment, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

6. Application : soit $[a, b]$ un segment, f une fonction continue définie sur $[a, b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Soit N un point du plan. Démontrer qu'il existe au moins un point de \mathcal{C}_f qui minimise la distance à N . Généraliser ce résultat au cas où f est définie sur \mathbf{R} .

3 Conclusion

Ces deux théorèmes reposent sur des démonstrations proches de celle du théorème des valeurs intermédiaires, dont la démonstration initiale revient au mathématicien italien Bolzano. C'est d'ailleurs parce que Weierstraß s'est inspiré de son idée que le théorème porte son nom.

Dans tous les cas, une « astuce » essentielle consiste à définir deux suites, l'une croissante, l'autre décroissante, dont la distance tend vers zéro (ce que l'on appelle des suites adjacentes), pour en déduire qu'elles possèdent une limite commune *via* le théorème de la limite monotone. En réalité, ce théorème de la limite monotone est un résultat fondamental qui caractérise l'ensemble des nombres réels. C'est à partir de ce théorème (ou un résultat équivalent que l'on appelle la *propriété de la borne supérieure*) que l'on démontre un ensemble de résultats fondamentaux de l'analyse tels que le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème « dérivée nulle implique fonction constante », les résultats reliant le signe de la dérivée au sens de variations, etc. Il est généralement considéré comme un *axiome* de \mathbf{R} .

1. Construire une suite de \mathbf{Q} décroissante et minorée qui n'admet pas de limite dans \mathbf{Q} . *On pourra construire une suite admettant une limite irrationnelle dans \mathbf{R} .*